



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO –
UFRRJ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO-SENSU*
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

**Produto Educacional: Desenho didático usando Torre de Hanói e
dispositivos de toque em tela em ambiente virtual**

LARISSA DE ALMEIDA REIS

Sob a orientação do Professor Doutor
Marcelo Almeida Bairral

Seropédica, RJ
Fevereiro de 2023

Produto Educacional: Desenho didático usando Torre de Hanói e dispositivos de toque em tela em ambiente virtual

O desenvolvimento desse produto educacional objetiva que futuros professores enriqueçam sua prática e sejam inspirados a utilizar de recursos muitas vezes já conhecidos sob uma nova ótica, mais dependente da tecnologia, no caso em dispositivos móveis de toque em tela (DMcTT) e de forma remota. Para tornar o ambiente virtual espontâneo e prazeroso, percebemos que o uso da Torre de Hanói (TH) digital, nesse contexto, pode inspirar os graduandos com uma forma de dinamizar as aulas online.

O produto educacional desenvolvido trata-se de um desenho didático, onde é possível construir uma ideia, participar do processo colaborativamente e unindo diversos tipos de conhecimento. Ressaltamos que o desenho didático é aberto a intervenções e múltiplas explorações.

Na construção do Produto, desenvolvemos os seguintes objetivos específicos: i) conhecer através de manipulação a TH digital; ii) desenvolver atividades de cunho investigativo, através da manipulação e interações online; iii) analisar o desenvolvimento dos alunos ao longo de cada aula virtual e atividades assíncronas compartilhadas em grupo de Facebook, e iv) identificar o uso e as possibilidades da utilização deste recurso utilizado de forma digital e abordado em ambiente virtual.

Para a implementação do desenho didático, o professor deve dispor de 6 encontros virtuais, sugerimos a plataforma Google Meet e interações semanais, conforme o Quadro 1 através da rede social Facebook em um grupo fechado da correspondente turma. Porém ao longo da prática do desenho didático, foi preciso conceber um sétimo encontro, curto, apenas para encerrarmos toda experiência.

Quadro 1 – Encontros e atividades com Torre de Hanói (Continua)

Encontro	Objetivo(s)	Tempo estimado	Instrumentos de coleta
1: <i>Descobrimo a TH digital</i>	Ativ. Semanal: responder questionário (quadro 1); baixar 3 app's. Aula: Discutir respostas do questionário sobre Torre de Hanói e manipular 3 aplicativos selecionados.	1 hora	Questionário Google Forms; aplicativos da TH
2: <i>Destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos</i>	Ativ. Semanal: escolher algum aplicativo da Torre de Hanói e trabalhar o uso deles, trazendo fatos interessantes e/ou questionamentos sobre o aplicativo e se é possível entender a lógica do recurso. Aula: Comentar sobre os aplicativos do encontro 1 e sobre a atividade da semana; discutir a experiência dos alunos no recurso digital.	1 hora	Aplicativos da TH
3: <i>Surgimento dos primeiros questionamentos</i>	Ativ. Semanal: pesquisar sobre TH para trazerem curiosidades ou questionamentos e responder perguntas curiosas no Facebook Aula: dissertar sobre a atividade semanal e fazer questionamentos sobre o uso da TH; discutir dúvidas anteriores.	1 hora	

4: <i>O uso positivo da ferramenta de gravação de tela</i>	Ativ. Semanal: 1: Postar no Face alguma nova curiosidade ou descoberta na Torre de Hanói. 2: Utilizando um App da TH da sua preferência, gravar os movimentos da torre com 3, 4 e 5 discos e gravar também alguma jogada ou observação curiosa no aplicativo. Aula: discutir a atividade e refletir sobre o uso da TH digital e seu uso de forma remota.	1 hora	Postagens no Facebook e uso do gravador de tela; aplicativos da TH.
5: <i>A descoberta do pensamento recursivo</i>	Ativ. Semanal: analisar documento que consta respostas de alunos à descoberta do número mínimo de movimentos da Torre de Hanói (anexo A). Os graduandos deverão escolher 2 de 8 grupos de alunos e analisar suas respostas e propor questionamentos. Aula: apresentar o trabalho e discutir cada dois grupos escolhidos.	1 hora	Documento do acervo do orientador com registro de seus alunos anteriores em atividade com Torre de Hanói
6: <i>Avaliação do aprendizado resultante dessa experiência</i>	Ativ. Semanal: analisar um roteiro de aula com a TH para a prova e responder perguntas no Facebook Aula: prova (apêndice B) e síntese das discussões de todas as atividades e descobertas desses encontros.	3 horas	Apostila com um roteiro de aula sobre Torre de Hanói; prova

1. Procedimentos

Apresentamos, agora, um planejamento do produto educacional para que o pesquisador possa implementar este desenho didático em suas turmas de ensino na licenciatura, este é, portanto, o público-alvo desse produto educacional. Os nomes escolhidos para cada encontro revelam o que é possível destacar em cada aula. Todas as atividades, com exceção da prova, podem ser realizadas em duplas. Ressaltamos que esse roteiro de aulas foi concebido após ser validada todas as etapas em aplicação em turma de Ensino Superior.

É necessário que para aplicação desse desenho didático, o docente tenha conhecimento do funcionamento da TH, da ferramenta de reuniões síncronas Google Meet e da rede social Facebook, se preferir, as interações assíncronas também poderão ser realizadas em grupo de whatsapp. O professor deve orientar seus alunos a postarem as atividades semanais no mínimo com 24 horas de antecedência para o professor ter um maior preparo durante a aula uma vez que já acessou o material.

1.1 Encontro 1: descobrindo a TH digital

Em momento anterior a esse encontro, os alunos deverão baixar três aplicativos da TH. O professor deve orientar seus alunos a realizar a manipulação do aplicativo de forma livre, usando seu aparelho celular. Os três aplicativos sugeridos para os alunos estão indicados abaixo. Peça também aos graduandos que indiquem seus pontos positivos e negativos ao manipularem os aplicativos, além de elaborar um breve texto comparativo entre eles.

Os aplicativos são: *Towers of Hanói*, *Hanói Towers 3d* e *Tower of Hanói*, até o momento da elaboração dessa tarefa, os três aplicativos estavam disponíveis para android ou iOS. Cada aluno tem como função postar no grupo do Facebook da turma uma

pergunta e uma curiosidade sobre a TH no seu dispositivo de toque em tela. É indispensável também, discutir a realização da tarefa em aula.

Em momento anterior, o professor deve enviar um questionário digital (recomendamos via Google Forms) conforme apêndice A, para obter um diagnóstico de quanto os futuros professores conhecem sobre o recurso da TH. O questionário em questão é composto de 9 perguntas. Como apresentado no Quadro 2 a seguir. O professor deve discutir as respostas dos discentes ao questionário em aula, bem como o registro dos alunos sobre a TH digital, com auxílio do Google Meet. O docente deverá perceber que seus alunos vão focar nos movimentos para concluir a TH, nas regras para poder movimentar os discos, o fato de aumentar o número de movimentos quando se aumentam os discos, etc. São observações iniciais que o professor precisa verificar se foram feitas.

Quadro 2 – Questionário Torre de Hanói

Perguntas do Questionário sobre a Torre de Hanói	
1.	Nome;
2.	Idade;
3.	Qual período ou semestre que se encontra?
4.	Você conhece (trabalhou ou só ouviu dizer) a Torre de Hanói?
5.	Se você respondeu não, vá para o final do questionário, se você respondeu sim, onde conheceu?
6.	A Torre de Hanói é um jogo?
7.	Diga pelo menos um conteúdo matemático explorado com a Torre de Hanói;
8.	Deseja fazer algum comentário?
9.	Você imagina o que é a Torre de Hanói?

Fonte: Elaboração própria

Temos a função de discutir sobre essas respostas em sala de aula após recolhidas as respostas do formulário. Além disso, deve ser feita a manipulação em tela da TH no momento da aula, cada aluno com seu smartphone e discutir sobre a experiência de primeiro contato com os aplicativos por parte dos estudantes. O aluno que respondeu “não” na questão 4, não responde as questões 5 a 8.

Em aula no Google Meet, o professor deve pedir para cada aluno fazer uma breve reflexão sobre suas experiências com os aplicativos mencionados e destacar seus aspectos positivos e negativos. Ressaltamos que assim como ocorreu conosco, os alunos podem saber informações mais profundas sobre a TH como por exemplo, o número mínimo de movimentos que se deve fazer com uma quantidade 'n' de discos. Isso não vai invalidar todo o trabalho a ser feito, pois como constatamos, o conhecimento dos alunos em TH não é tão profundo, uma vez que os alunos acabam a utilizando em raros momentos da caminhada escolar e/ou acadêmica.

Durante a aula, o professor pode fazer os seguintes questionamentos aos alunos: qual desses aplicativos você usaria? Como foi o comportamento do aplicativo ao final de cada jogada? Caso os alunos sejam bem sucintos e pouco informativos em suas falas.

1.2 Encontro 2: destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos

Nesse encontro o objetivo é discutir sobre a nova atividade semanal, conforme descrita no Quadro 1, e a partir disso, (re)discutir com os alunos a experiência dos mesmos com a TH em mídia digital.

Nesse momento, é importante que o professor levante novos questionamentos, caso os mesmos não se revelem: Com o que já conhecem da TH e através da manipulação dos aplicativos, é possível identificar quais regras? Qual é o objetivo da TH? O que um aplicativo desse recurso teria que apresentar para ser considerado um bom aplicativo para o uso da TH? Como a atividade dessa semana são os alunos mesmos pesquisarem por

outras TH digital, esse último questionamento implicará em respostas a partir dos aplicativos que eles encontrarão, somados àqueles usados na primeira aula.

Durante esse encontro, os alunos vão conhecer outros aplicativos e podem surgir questionamentos como: Encontrei determinadas TH digital que é permitida a finalização dos movimentos com os discos na haste intermediária enquanto outras TH só consideram finalizados os movimentos quando os discos estão na haste final. De fato, isso ocorre. Sugerimos que o professor não responda imediatamente nesse momento, a fim de verificar se com novas manipulações em tela e a realização de outras tarefas esse questionamento será capaz de ser sanado. Nessa aula, os alunos deverão ser capazes de reconhecer as regras da TH e saber dizer, com certeza, qual é o grande objetivo da TH. Por isso, os questionamentos acima, podem auxiliar o aplicador.

Outro questionamento que pode surgir a partir dessa aula, é sobre a quantidade de discos que os aplicativos oferecem. A maioria deles oferecerem no máximo entre seis e oito discos no total, por que isso ocorre? O docente antes de dar uma resposta, poderá questionar aos outros estudantes sobre essa mesma dúvida, a fim de deixá-los conversarem e concluírem. Mesmo que eles ainda não saibam qual será o número de jogadas com seis ou oito discos, eles já são capazes de entender que ocorre um aumento grande, exponencial de uma quantidade para a outra de discos.

A partir das respostas dos alunos e do bate papo, novos questionamentos e/ou novas tarefas podem ser feitas. Conforme o Quadro 1, deixe uma tarefa para a semana do encontro 3 para ampliar os conhecimentos da turma sobre o recurso.

1.3 Encontro 3: surgimento dos primeiros questionamentos

Para esse encontro, os alunos, previamente, devem pesquisar por sites ou planos de aula sobre TH para sanar suas dúvidas ou gerar novos questionamentos no uso do recurso. Entendemos que é importante que o aluno tenha bem estabelecido as ideias de TH, seus objetivos e estratégias para que posteriormente possa aplicar à seus alunos.

Nessa aula, como planejado, será possível ouvir dúvidas ou novos questionamentos sobre a fórmula que revela o número mínimo de movimentos para completar a TH com determinado número de discos.

Após a pesquisa é possível refletir sobre os conteúdos que estão relacionados a TH, se isso foi encontrado nas pesquisas deles, se eles tinham conhecimento desses conteúdos, etc. Ao longo dessas aulas o professor poderá fazer uma lista de questionamentos curiosos de acordo com as discussões no Google Meet para eles responderem no Facebook quando estiverem preparados, pois os posts ficam fixos no Facebook. Destacamos como questionamentos curiosos: qual disco faz mais movimento? Existem sequência de movimentos que se repetem?

Nessa aula os estudantes já poderão discutir sobre a fórmula de número mínimo, pois os mesmos eventualmente poderão localizá-las em pesquisas. Recomendamos, fortemente, que o professor monte uma tabela com os alunos em aula, para registrar qual o número mínimo de movimentos (em coluna 2) da TH com determinado número discos (coluna 1), para que os estudantes percebam certos padrões, caso ainda não tenha feito. Se necessário, peça aos licenciandos para compartilharem tela de seus movimentos com os colegas, para isso, é necessário conectar a reunião pelo dispositivo de toque em tela.

1.4 Encontro 4: o uso positivo da ferramenta de gravação de tela

Na semana desse encontro devem ser propostas duas atividades. 1: Postar no Facebook alguma nova curiosidade ou descoberta sobre a TH digital e 2: Utilizando o aplicativo da TH da sua preferência, o aluno deve gravar os movimentos da TH com três, quatro e cinco discos e gravar também alguma jogada ou observação curiosa no aplicativo selecionado. Essas atividades devem ser postadas no grupo fechado do Facebook ou outra rede social de uso da turma. Sugerimos os aplicativos: Az Screen Recorder ou Du Recorder para a gravação de tela, mas deixamos que os graduandos optassem por utilizar outro aplicativo da preferência deles.

Na aula, é importante deixar que cada aluno ou dupla, apresente sobre sua atividade semanal. Em seguida, os alunos que souberam, sejam encorajados a responder a dúvida ou comentar sobre a curiosidade um do outro colega. Com a segunda atividade, da gravação de tela, objetivamos obter novas respostas de questionamentos dos alunos.

Sobre a atividade 1, o docente terá acesso ao grupo do Facebook e poderá acompanhar as postagens sobre as descobertas dos alunos para discuti-las em aula. Dessa forma, dependendo dos questionamentos, devemos conduzir os seguintes questionamentos aos discentes: É possível perceber alguma estratégia para se estabelecer o número mínimo de movimentos com certa quantidade de discos? Existe algum padrão na movimentação dos movimentos? Quais séries da educação básica podem ser contempladas com esse recurso? Houve dificuldade ao aumentar o número de discos? Qual disco mais se movimentou?

Os graduandos, nessa etapa, já conseguem responder a maioria dessas perguntas. Além disso, os estudantes podem comentar sobre suas experiências com a TH digital associado ao recurso de gravação de tela. É importante o docente saber que existe estratégia: Quando o número de discos for ímpar, devemos iniciar os movimentos colocando o menor disco na haste da extremidade e quando for par, o menor disco se inicia na haste do meio. Além disso, a TH pode ser usada desde os anos iniciais relacionada ao raciocínio lógico, como na educação básica em diversos conteúdos.

No caso de os participantes ainda apresentarem dificuldades para encontrar estratégias, o docente pode conduzir questionamentos mais incisivos como: realize as movimentações da TH com o número mínimo de movimentos para dois, três, quatro e cinco movimentos. O que você observa ao mover o primeiro disco quando a quantidade deles é par? E quando for ímpar? Assim os alunos serão capazes de assimilar.

Sobre as gravações de tela, peça aos alunos manipularem a TH digital, conforme a Atividade 2, verbalizando suas estratégias e considerações sobre o movimento para que seja possível capturar mais dados sobre o desempenho do aluno para um melhor acompanhamento. O docente ao analisar os vídeos, poderá verificar dificuldades na movimentação com 5 discos em diante, consideramos aceitável pois é necessário fazer mais de 30 movimentos no mínimo.

1.5 Encontro 5: a descoberta do pensamento recursivo

A atividade dessa semana cinco, é analisar um documento do acervo do professor e orientador desta pesquisa,. Nesse documento constam registros de alguns de seus alunos de Ensino Médio e Ensino Superior, à descoberta do número mínimo de movimentos da TH. Os alunos podem escolherem livremente, o registro de dois dos oito grupos do documento, observar suas respostas e alguns deles, até poderão propor questionamentos. O documento está disponível no anexo A.

Na aula referente a esse encontro, os alunos devem apresentar suas observações sobre os registros dos grupos escolhidos. Essa etapa será feita via compartilhamento de tela, que é uma ferramenta disponível na interface do Google Meet, ao compartilhar o

documento que contém os grupos a serem analisados, os alunos em sua apresentação terão que mostrar o contexto da resposta e seu parecer sobre a atividade.

Nessa atividade o professor deve pedir aos alunos para destacarem o que foi possível entender sobre o pensamento do aluno, e se deixariam algum questionamento para o grupo. Nessas apresentações alguns alunos passarão pela observação do grupo 8. O professor pode questionar aos alunos que tipo de pensamento¹ está envolvido no desenvolvimento daquele grupo. Nesse encontro, os discentes deverão ser capazes de observar os diferentes raciocínios (recursivo e indutivo) envolvidos com a TH. É importante saber que, no geral, a TH trabalha com o raciocínio indutivo, porém outras formas de raciocínio podem aparecer na relação com a TH como é o caso do raciocínio recursivo. Para isso o professor poderá mediar a discussão a ponto de se identificar o tipo de raciocínio envolvido.

Ao final de cada apresentação é relevante fazer o destaque de pontos positivos da apresentação e provocá-los com eventuais dúvidas que não foram relatadas em suas observações. Além da apresentação, essas atividades devem ser postadas no Facebook para serem observadas pelo professor com mais riqueza de detalhes.

1.6 Encontro 6: avaliação do aprendizado resultante dessa experiência

Para o encontro 6, o professor deverá enviar com antecedência uma apostila da fundação CECIERJ aos discentes, da autoria de Maciel *et al.* (2006) intitulada: *aula 19 – Movendo discos, formando Torres e pensando indutivamente*,² que será material de estudo e consulta para a realização de uma prova que se encontra no apêndice C. A prova foi baseada nos resultados de nossos encontros para a construção dos questionamentos e ainda conta com uma questão para ser resolvida em DMcTT de cada participante. Estes devem ser orientados a enviar essa atividade/questão, utilizando novamente o recurso de gravação de tela. Diante disso, a avaliação foi construída ao longo dos encontros e sugerimos a entrega no último encontro pelo grupo virtual da turma.

Decidimos que é importante realizar uma prova, pois gostaríamos de verificar o desempenho dos alunos sobre TH após todo o desenvolvimento desse desenho didático. O que chamamos de prova aqui é na verdade uma avaliação com recursos variados como consulta a apostila mencionada e gravação de vídeos curtos, além de questões baseadas na opinião dos alunos.

Sugerimos ao leitor que aplique a prova entre duas a três horas para a realização e, caso seja necessário, que se faça um encontro 7 apenas para refletir e concluir toda as experiências e registrar o *feedback* dos alunos sobre os encontros anteriores.

¹ Usamos, nesse produto, as palavras “raciocínio” e “pensamento” como sinônimos.

² Disponível em: Instrumentação para o ensino de aritmética e álgebra, módulo 1. Rio de Janeiro, apostila fundação CECIERJ

APÊNDICES

Apêndice A: Respostas ao questionário sobre Torre de Hanói

Questionário sobre Hanói (Parte 1)

Você conhece a Torre de Hanói

olá graduando(a) da disciplina de Ensino de Matemática II. responda o questionário abaixo sobre seus conhecimentos de Torre de Hanói.

seu nome

Texto de resposta curta

2. sua idade

Texto de resposta curta

3. Qual período ou semestre que se encontra *

Texto de resposta curta

4. Você conhece (trabalhou ou só ouviu dizer) a Torre de Hanói? *

sim

não

Figura 1: Você conhece a TH?
Fonte: elaboração própria

Questionário sobre Hanói (Parte 2)

5. Se você respondeu não, vá para o final do questionário, se você respondeu sim, onde conheceu? *

Texto de resposta curta
.....

6. A Torre de Hanói é um jogo? *

Texto de resposta curta
.....

7. Diga pelo menos um conteúdo matemático explorado com a Torre de Hanói. *

Texto de resposta curta
.....

8. Deseja fazer algum comentário sobre Torre de Hanói?

Texto de resposta longa
.....

9. Você imagina o que é a Torre de Hanói?

Texto de resposta longa
.....

Figura 2: Você conhece a TH? Parte 2.
Fonte: elaboração própria

Apêndice B - Prova de Ensino de Matemática II aplicada

UFRRJ – DTPE/IE – Prova de Ensino de Matemática II, 2020.1 (valor: 10,0 pontos)
Professor: Marcelo A. Bairral

*“Não quero ser feliz. Quero é ter uma vida interessante”*³
Contardo Calligaris

Caro(a) graduando(a),

Essa prova está constituída de cinco questões para serem refletidas e respondidas, individualmente, em até 3h. Responda todas aqui mesmo ou você pode escrever e fazer *print* das respostas e colocá-las todas em um único doc (salvar o doc com teu primeiro nome) e mandar no privado até às 18h. Caso faça *print* de escritos, desenhos etc. é importante ficar legível. A fonte principal de consulta para a prova é a Aula 19 (MACIEL *et al.*, 2006), mas caso você utilize alguma outra cite-a também colocando o link e a hora de acesso, se for o caso.

Desejo que você faça uma excelente prova!

Questão 1 (2,0)

(a) Dos grupos 1 e 2 do Ensino Médio (Prof^a. Angela, p. 240-241) em qual dele está presente o raciocínio indutivo? Por quê?

(b) Indique e explique, no raciocínio e resposta do grupo, a presença do passo três da prova por indução, ou seja, “*que $P(n+1)$ também é verdadeira*”.

Questão 2 (1,0)

Qual o tipo de raciocínio matemático usado pelo grupo 3 (p. 244-245)? Por quê?

Questão 3 (3,0)

(a) Você concorda com a afirmação (p. 248)? “*É importante enfatizar que não deve ser objetivo do professor estabelecer comparações do tipo saber mais ou menos. É relevante que os alunos percebam, analisem e respeitem o matematizar do seu colega e contribuam com a continuidade deste processo, pois ensino-aprendizagem é um processo contínuo de aprender a aprender e aprender a ser fortalecido pelas relações interpessoais, e não mera acumulação acrítica de conhecimentos*”.

(b) Destaque e comente um aspecto de qualquer um dos grupos (daqui do PDF da Aula 19) que você considera interessante e justifique.

Questão 4 (1,0)

Por que a Torre de Hanoi não é um material curricular educativo online (MCEO)? Justifique.

Questão 5 (3,0)

Nessa questão você trabalhará na Torre de Hanoi *online* ou de um aplicativo, o que você preferir. Quando responder ao item:

³ Disponível em: <https://www.revistaprosaveroarte.com/nao-querer-ser-feliz-querer-e-ter-uma-vida-interessante-contardo-calligaris/> Acesso em: 19 abril 2021.

(a) diga qual está usando e o motivo da sua escolha. Será necessário também usar um aplicativo de captura de tela (DU Recorder ou qualquer outro). Este APP não precisa justificar a escolha.

(a) Use o aplicativo de gravação e faça um vídeo explicando/movimentando um aspecto do teu aprendizado com as Torres, seja a partir da Aula 19, seja em outro momento do seu estudo nesse jogo.

(b) Agora relate como foi a tua experiência com as gravações em tela usando um APP.

(c) Comente também como você usaria esse tipo de recurso de gravação com seus alunos.

ANEXOS

Anexo A - Registro retirado do artigo de Bairral (2001) analisada no Encontro 5

ATIVIDADE

Orientações: (individual ou dupla) Escolham e analisem de respostas de apenas dois grupos de alunos. Vocês devem escolher um grupo do Ensino Médio e um do Ensino Superior.

A seguir as contribuições do Grupo 1:

Atividade de semana:

- Após lerem e analisarem o escrito de cada grupo façam uma descrição sobre o que cada grupo fez, ou seja, expliquem o que o grupo fez, pensou, escreveu. Neste momento não opinem.
- Agora vocês deverão fazer comentários e pedirem esclarecimentos ao grupo. Elaborem, pelo menos, uma pergunta para instigar o grupo.
- Respondam a sua pergunta.

Orientações

- Trabalhem, preferencialmente, em dupla e postem no Face quais grupos analisarão. **É importante que todos os grupos sejam analisados.**
- Portem no grupo do Face até as 14h do dia 07/04/21.

Alunos do Ensino Médio (1º ano) – Grupo 1 ao 6

Todos os alunos (Ensino Médio ou Superior) trabalharam presencialmente em torno de 6 aulas com as Torres.

Grupo 1

Tudo começou quando a professora Angela nos levou para a sala de informática e nos apresentou um jogo chamado Hanói. O jogo consiste em 3 barras e tantos discos quanto você pedir, e o objetivo é passar todos os discos da barra A para a barra C, com a ajuda da barra B, deixando os em ordem do menor para o maior (de cima para baixo). Depois de jogar por alguns minutos, o grupo resolveu fazer uma tabela relacionando o número de discos com o número de movimentos mínimos usando esses discos.

Esta tabela segue abaixo:

Número de discos	3	4	5	6	7	8	9	10
Jogadas mínimas	7	15	31	63	127	255	511	1023

“o número de jogadas mínimas era sempre o dobro, acrescido de um, do número de jogadas mínimas anteriores a ele”. Então formulamos a seguinte teoria que diz:

$$f(x-1) = (f(x) - 1) / 2$$

Depois que a aula de matemática acabou, um dos componentes do grupo acabou por descobrir a fórmula observando a tabela acima. Mas depois, descobriu-se que haveria várias formas de se chegar a este resultado. Uma delas seria analisando o gráfico da função.

A seguir as contribuições do Grupo 2:

Não achamos a fórmula, a única coisa que descobrimos foi que o nº de movimentos mínimos pode dessa forma, multiplica-se por 2 e soma 1.

	Pecas	Nº Mínimo de Movimentos	
$2^x - 1$	3	7) $2x + 1$
	4	15	

A seguir as contribuições do Grupo 3:

nº de discos	nº de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
(...)	

1
 $1+2$
 3
 $4+2+1$
 7
 $8+4+2+1$
 15

$$f(x) = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots}_{x \text{ vezes}} = \boxed{2^x - 1}$$

$$\boxed{f(x) = 2^x - 1}$$

A seguir as contribuições do Grupo 4:

- Sempre que há número de pinos igual a par, deve-se começar o jogo pondo o primeiro pino no terceiro receptor.
- Sempre que há número de pinos igual a ímpar, deve-se começar o jogo pondo o primeiro pino no segundo receptor.
- De acordo com o gráfico acima, podemos perceber que a diferença entre o número de jogadas é uma sequência de múltiplos de 2, sendo que esse mesmo nº - 1 = ao 1º nº relacionado.

- Achemos também umas fórmulas:

$$\rightarrow f(3) = \underline{2x+1}$$

$$\rightarrow f(4) = 2f(3) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(2x+1) + 1 \rightarrow \underline{4x+3}$$

$$\rightarrow f(5) = 2f(4) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(4x+3) + 1 \rightarrow \underline{8x+7}$$

$$\rightarrow f(6) = 2f(5) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(8x+7) + 1 \rightarrow \underline{16x+15}$$

$$\rightarrow f(7) = 2f(6) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(16x+15) + 1 \rightarrow \underline{32x+31}$$

E assim sucessivamente. Depois disso, concluímos que isso tudo é igual a:

$$f(n) = 2 f(n-1) + 1 \rightarrow N > 0$$

Vendo as várias fórmulas que foram apresentadas antes da fórmula final, percebemos que, o número que vem antes do x é igual ao número de diferença entre as jogadas, e o que vem depois do sinal de $+$ é igual ao número de jogadas anterior.

A seguir as contribuições do Grupo 5:

É preciso 7 jogadas para deslocar os 3 primeiros discos para a torre 2 e mais 1 jogada para deslocar a maior peça para a torre 3. Novamente, fizemos 7 jogadas para deslocar os 3 discos para a torre 3.

- Para sermos mais objetivos, formulamos esta tabela que indica o número mínimo de jogadas para o número de discos utilizados:

Peças	Número de Jogadas			Total
3	7	1		
4	7	1	7	15
5	15	1	15	31
6	31	1	31	63
7	63	1	63	127

- Por esta tabela pudemos deduzir que a fórmula é:

$$2^x - 1$$

A seguir as contribuições do Grupo 6:

Nós conseguimos deduzir, descobrir, a fórmula que estabelece o número mínimo de movimentos para cada quantidade de discos, e aí está ela: $2^n - 1$. Nós a descobrimos depois de muito trabalho, depois de passarmos horas e horas com uma folha em frente com o número de discos e seus respectivos números mínimos de movimentos, estabelecendo relações até não poder mais, e vamos tentar explicar como chegamos a essa fórmula.

Primeiramente, observamos que de um número mínimo de movimentos para o outro, era só descobrir a diferença entre eles e multiplicar por 3, que aí você teria o próximo número mínimo de movimentos, que seria: $2y + 1$, você coloca o número mínimo de movimentos, multiplica por 2 e soma 1, por exemplo: o número de discos é 3, e seu número mínimo de movimentos é 7, você pega o número 7 e multiplica por 2 ($7 \times 2 = 14$) e soma 1, e você obterá o número 15, que é o número mínimo de movimentos de 4 discos e assim por diante.

Observamos também que todos os números mínimos de movimentos são primos e ímpares, e que todos seguem uma sequência a partir do último número, e esta sequência seria: 7, 15, 31 e 63; como podemos ver **7**, **15**, **31**, 63, **127**, **255**, **511**, 1023,...(respectivamente, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 discos)

ALUNOS DO ENSINO SUPERIOR

A seguir as contribuições do Grupo 7:

<i>Quantidade de discos das Torres(n)</i>	<i>Quant. de movimentos das peças nas Torres</i>	<i>Total de movimentos</i>						
		<i>Pç 2</i>	<i>Pç 3</i>	<i>Pç 4</i>	<i>Pç 5</i>	<i>Pç 6</i>	<i>Pç 7</i>	
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	0	31
6	32	16	8	4	2	1	0	63
7	64	32	16	8	4	2	1	127

- A quantidade mínima de movimentos das torres com n discos é igual à soma de uma P.G. finita de razão 2, 1º termo igual a 1 e com n° de termos igual ao n° de discos da torre.
- Ao movimentarmos o número de discos, a quantidade de movimentos de cada peça cresce em P.G. de razão 2, com 1º termo igual a 1.
- O n° de movimentos de uma torre com n discos é igual ao dobro de movimentos da torre com $(n-1)$ discos acrescido de 1 movimento.
- Condições para os movimentos das peças para obtermos o mínimo possível. Consideramos as peças/discos numerados de 1 a 7. Dividimos a torre de Hanoi conforme o esquema seguinte:
- As peças ímpares se movimentam seguindo a ordem crescente dos pinos partindo do $n^\circ 1$

- *As peças pares se movimentam seguindo a ordem decrescente dos pinos partindo do nº 1*
- *A tabela apresentada anteriormente forma uma matriz triangular inferior, com a diagonal principal contendo todos os termos igual a 1, apresentando 7 divisores do nº 64*
- *O número de divisores de 64 contido na matriz é igual ao número de discos da torre de Hanoi.*
- *A matriz é quadrada e de ordem 7.*

1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
4	2	1	0	0	0	0
8	4	2	1	0	0	0
16	8	4	2	1	0	0
32	16	8	4	2	1	0
64	32	16	8	4	2	1

A seguir as contribuições do Grupo 8:

Variando o número de discos e tentando identificar qual o número que expressa o mínimo de movimentos necessários [...] passamos à tarefa de generalizar para um número n de discos. Veja os passos utilizados nesses raciocínios:

1º passo

Número de discos	Número min. Movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

2º passo:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 a_1 + 1$$

$$a_3 = 2 a_2 + 1$$

$$a_4 = 2 a_3 + 1$$

$$a_5 = 2 a_4 + 1$$

$$a_6 = 2 a_5 + 1$$

3º passo:

$$a_7 = 2 a_6 + 1$$

$$a_7 = 2 \cdot 63 + 1 = 127$$

4º passo:

$$a_n = 2 (a_{n-1} + 1)$$

$n = n^\circ$ de discos

$a = n^\circ$ min. de mov.

5º passo:

$$a_7 = 2 a_6 + 1$$

$$a_7 = 2 (2 a_5 + 1) + 1$$

$$a_7 = 4 a_5 + 3$$

$$a_7 = 4 (2 a_4 + 1) + 3$$

$$a_7 = 8 a_4 + 7$$

$$a_7 = 8 (2 a_3 + 1) + 7$$

$$a_7 = 16 a_3 + 15$$

$$a_7 = 16 (2 a_2 + 1) + 15$$

$$a_7 = 32 a_2 + 31$$

$$a_7 = 32 (2 a_1 + 1) + 31$$

$$a_7 = 64 a_1 + 32 + 31$$

$$a_7 = 64 + 32 + 31$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2^{7-2} + 2^{7-2} - 1$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2 (2^{7-2}) - 1$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2^{7-1} - 1$$

$$a_7 = 2 (2^{7-1}) - 1$$

$$a_7 = 2^7 - 1$$

6º passo: $a_n = 2^n - 1$..