



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA.**

**LORRANY MIRANDA OLIVEIRA**

**AS TRANSFORMAÇÕES DO PLANO E OS MOSAICOS:  
ELEMENTOS DE MOTIVAÇÃO PARA O ENSINO DA  
GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**SEROPÉDICA**

**2020**



**LORRANY MIRANDA OLIVEIRA**

**AS TRANSFORMAÇÕES DO PLANO E OS  
MOSAICOS: ELEMENTOS DE MOTIVAÇÃO PARA O  
ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Monografia Apresentada à Banca Examinadora da UFRRJ, como requisito parcial para obtenção do título de Graduada em Matemática na modalidade de Licenciatura, sob a orientação do professor Dr. Renato Machado Aquino.

SEROPÉDICA

2020



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



ATA Nº 4123 / 2020 - DeptM (12.28.01.00.00.00.63)

Nº do Protocolo: 23083.068707/2020-06

Seropédica-RJ, 17 de dezembro de 2020.

A monografia "AS TRANSFORMAÇÕES DO PLANO E OS MOSAICOS: ELEMENTOS DE MOTIVAÇÃO PARA O ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA", apresentada e defendida por LORRANY MIRANDA OLIVEIRA matrícula 201219036-5 foi aprovada pela Banca Examinadora, com conceito "S" recebendo o número 744.

Seropédica, 07 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA: Prof. Dr. Renato Machado Aquino (**Orientador**), Prof. Dr. Carlos Andres Reyna Vera Tudela e Prof. Dr. Pedro Carlos Pereira.

*(Assinado digitalmente em 17/12/2020 14:48 )*  
CARLOS ANDRES REYNA VERA TUDELA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)  
Matrícula: 2433643

*(Assinado digitalmente em 18/12/2020 10:34 )*  
PEDRO CARLOS PEREIRA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)  
Matrícula: 6377694

*(Assinado digitalmente em 21/12/2020 16:47 )*  
RENATO MACHADO AQUINO  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)  
Matrícula: 418840

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufrj.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **4123**, ano: **2020**, tipo: **ATA**, data de emissão: **17/12/2020** e o código de verificação: **c5150373ee**

*Ao meu grande amigo Renato*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, avós, irmãos, primos e tios por todo apoio.

Aos meus amigos, em especial ao Arthur, ao Robert, a Adrienne e a Thaís que tanto me ajudaram durante esses longos anos.

Aos professores que tive nessa jornada ruralina por compartilharem seus conhecimentos.

Ao meu orientador, que passou de professor a um grande amigo, por toda dedicação, paciência e apoio a mim dispensados.

À Rural, minha eterna casa, onde vivenciei momentos incríveis e tanto me ensinou.

E a mim, por mesmo querendo muito, não ter desistido desse sonho.

## RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido através de uma pesquisa bibliográfica sobre os mosaicos. Sua história, obras e o artista M.C. Escher são estudados e, principalmente, sua ligação com a Matemática. Conceitos geométricos como polígonos regulares, ângulos, nós, arestas, rotação, translação, e outras transformações do plano são explorados e aplicados na pavimentação do plano. Algumas atividades para se trabalhar o tema em sala de aula são propostas.

Palavras-Chave: Geometria; Pavimentação; Mosaico; Matemática; Escher.

## Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
<b>CAPÍTULO 1. MOSAICO NA ARTE</b> .....	12
<b>CAPÍTULO 2. PAVIMENTAÇÕES DO PLANO</b> .....	21
2.1. Alguns conceitos .....	22
2.2. Pavimentação com polígonos regulares de um único tipo .....	23
2.3. Padrões regulares e duais .....	26
2.4. Pavimentação com polígonos regulares de diferentes tipos .....	28
2.4.1. Analisando as possibilidades.....	35
2.4.2. Pavimentando o plano .....	36
<b>CAPÍTULO 3. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO</b> .....	43
3.1. Entendendo alguns conceitos .....	43
3.2. Simetrias .....	438
3.2.1. Criando padrões com algumas simetrias lineares .....	4350
3.2.2. Criando padrões com algumas simetrias bidimensionais .....	51
<b>CAPÍTULO 4. ESCHER NA SALA DE AULA</b> .....	54
4.1. Biografia .....	54
4.2. Obras .....	55
4.2.1. Escher e a matemática .....	58
4.3. Propostas de Atividades .....	60
4.3.1. Atividade 1.....	61
4.3.2. Atividade 2 .....	62
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	64
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	64

## Lista de figuras

<b>Figura 1</b> – Artefato conhecido como o “Estandarte de Ur” .....	12
<b>Figura 2</b> – Mosaico do final do século IV a.C., “Uma caça ao veado” .....	13
<b>Figura 3</b> – (a) “A consulta”, de Dioscorides de Samos. (b) “O Mosaico de Alexandre”, piso da Casa do Fauno .....	14
<b>Figura 4</b> – “Nile mosaic of Palestrina” .....	15
<b>Figura 5</b> – (a) Parte do mosaico “Great Hunting Scene”. (b) “Bikini Girls”, mosaico que retrata mulheres de biquíni praticando esporte .....	16
<b>Figura 6</b> – Obras (a) “The Four Seasons”. (b) “Sacrificio de Ifigenia” .....	17
<b>Figura 7</b> – Capela Palatina de Palermo .....	18
<b>Figura 8</b> – Mosaico da Basílica de São Pedro, no Vaticano, que é replica da pintura “A Transfiguração” de Raphael Sanzio .....	19
<b>Figura 9</b> – (a) Calçada da Avenida Rio Branco, no Rio de Janeiro. (b) Largo São Sebastião, em Manaus. ....	20
<b>Figura 10</b> – (a) Cúpula da Basílica do Valle de los Caídos, por Satiago Padrós Elías. (b) “Running Rug” de Marcelo Melo. (c) “Spinoff” de Sonia King .....	21
<b>Figura 11</b> – (a) Pavimentação lado-lado. (b) Pavimentação arquimediana. (c) Pavimentação platônica .....	22
<b>Figura 12</b> – Polígono com ângulo interno .....	23
<b>Figura 13</b> – (a) Triângulos equiláteros ao redor de um ponto. (b) Pavimentação por triângulos equiláteros .....	24
<b>Figura 14</b> – (a) Quadrados ao redor de um ponto. (b) Pavimentação por quadrados .....	24
<b>Figura 15</b> – Pentágono regular (não pavimenta o plano) .....	25
<b>Figura 16</b> – (a) Hexágonos regulares ao redor de um ponto. (b) Pavimentação por hexágonos .....	25
<b>Figura 17</b> – (a) e (b) Pavimentações com triângulos equiláteros. (c) e (d) Pavimentações com quadrados .....	26
<b>Figura 18</b> – (a) Quadrados. (b) Triângulos isósceles. (c) Hexágonos regulares. (d) Trapézios isósceles .....	26
<b>Figura 19</b> – (a) Pavimentação com hexágonos regulares e triângulos equiláteros. (b) Pavimentação de quadrados com padrão regular. (c) Pavimentação com triângulos equiláteros e hexágonos regulares .....	27
<b>Figura 20</b> – (a) Padrões (3, 3, 3, 3, 3, 3) e (6, 6, 6). (b) Padrão (4, 4, 4, 4) .....	27
<b>Figura 21</b> – (a) Configuração (3, 7, 42). (b) (3, 8, 24). (c) (3, 9, 18). (d) (3, 10, 15) .....	35
<b>Figura 22</b> – (a) Configuração (4, 5, 20). (b) Configuração (5, 5, 10) .....	36
<b>Figura 23</b> – (a) (3, 12, 12). (b) (4, 6, 12). (c) (4, 8, 8). (d) (3, 3, 3, 3, 6) .....	37
<b>Figura 24</b> – (a) Arranjo (3, 3, 4, 12). (b) Combinação dos arranjos (3, 3, 4, 12) e (3, 3, 3, 3, 3, 3) .....	38
<b>Figura 25</b> – (a) Arranjo (3, 4, 3, 12). (b) Combinação dos arranjos (3, 4, 3, 12) e (3, 12, 12) .....	39
<b>Figura 26</b> – Configuração (3, 3, 6, 6) .....	39
<b>Figura 27</b> – (a) Combinação dos arranjos (3, 3, 6, 6) com (3, 6, 3, 6). (b) (3, 3, 6, 6) com (3, 3, 3, 3, 3, 3) .....	40
<b>Figura 28</b> – Pavimentação do plano com o arranjo (3, 6, 3, 6) .....	40

<b>Figura 29</b> – (a) Arranjo (3, 4, 4, 6). (b) e (c) padrões obtidos da combinação de (3, 4, 4, 6) com (3, 4, 6, 4).....	41
<b>Figura 30</b> – Pavimentação do plano com o arranjo (3, 4, 6, 4).....	41
<b>Figura 31</b> – (a) (3, 3, 3, 4, 4). (b) (3, 3, 4, 3, 4). (c) e (d) Padrões obtidos da combinação de (3, 3, 3, 4, 4) com (3, 3, 4, 3, 4).....	42
<b>Figura 32</b> – Translação de um ponto P por um vetor fixo $v$ .....	43
<b>Figura 33</b> – Translação dos pontos P e Q por um vetor fixo $v$ .....	43
<b>Figura 34</b> – Translação uma figura A por um vetor fixo $v$ .....	44
<b>Figura 35</b> – Composição de translação.....	44
<b>Figura 36</b> – Ponto obtido por uma meia-volta em relação ao centro de simetria.....	45
<b>Figura 37</b> – Figura obtida por uma meia-volta em relação ao centro de simetria.....	45
<b>Figura 38</b> – Rotação do ponto P em torno de O através do ângulo $\theta$ .....	46
<b>Figura 39</b> – Rotação de uma figura A em torno de O através do ângulo $\theta$ .....	46
<b>Figura 40</b> – Reflexão (a) de um ponto e (b) de uma figura sobre uma reta.....	47
<b>Figura 41</b> – (a) Reflexão deslizante de um ponto. (b) Reflexão deslizante de uma figura.....	48
<b>Figura 42</b> – (a) Friso de arquitetura islâmica. (b) Parede com friso em árabe. (c) Papel de parede. (d) Piso vitoriano com friso.....	49
<b>Figura 43</b> – (a) Simetria linear de translação (horizontal). (b) Simetria linear de translação (vertical).....	50
<b>Figura 44</b> – (a) Simetria linear de meia-volta: lado girado. (b) Simetria linear de meia-volta: fundo girado.....	50
<b>Figura 45</b> – Simetria linear de deslizamento vertical com reflexão horizontal.....	51
<b>Figura 46</b> – (a) Friso com simetrias de translação e meia-volta. (b) Friso com simetrias de translação, reflexão deslizante e meia-volta. (c) Friso com simetrias de translação e reflexão vertical. (d) Friso com simetrias de translação e reflexão horizontal.....	51
<b>Figura 47</b> – Simetria bidimensional de translação.....	52
<b>Figura 48</b> – Telha e padrão gerados da simetria por meia-volta em relação a um ponto na lateral.....	52
<b>Figura 49</b> – Padrão obtido da simetria por rotação em torno do canto inferior esquerdo.....	53
<b>Figura 50</b> – (a) Anjos e demônios: reflexão. (b) Horseman: reflexão deslizante.....	53
<b>Figura 51</b> – Obras da primeira fase: (a) Tower of Babel (1928) e (b) Castrovalva (1930). Obras da segunda fase: (c) The Encounter (1944) e (d) Relativity (1953).....	56
<b>Figura 52</b> – Eight heads, 1922.....	57
<b>Figura 53</b> – (a) Mosaico de Alhambra. (b) e (c) Esboços de mosaicos de Alhambra feitos por Escher.....	58
<b>Figura 54</b> – (a) Hand with reflecting sphere. (b) Metamorphosis I.....	59
<b>Figura 55</b> – (a) Day and night. (b) Two intersecting planes. (c) Magic mirror. (d) Spirals.....	60
<b>Figura 56</b> – (a) Obra N°99 de Escher. (b) Obra N°99 evidenciando a malha. (c) Transformação da figura primária.....	63

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Soluções da equação 2.1 para $n_1 = 3$ .....	2929
Tabela 2 – Soluções da equação 2.1 para $n_1 = 4$ .....	30
Tabela 3 – Soluções da equação 2.1 para $n_1 = 5$ .....	30
Tabela 4 – Soluções da equação 2.4 para $n_1 = 3$ e $n_2 = 3$ .....	32
Tabela 5 – Soluções da equação 2.4 para $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$ .....	32
Tabela 6 – Soluções da equação 2.6 .....	34
Tabela 7 – Configurações que pavimentam o plano .....	36

## INTRODUÇÃO

Embora a Geometria tenha ficado muito tempo relegada a segundo plano, seu ensino tem sido objeto de pesquisa ativa, tanto do ponto de vista de como se constrói esse conhecimento, quanto do ponto de vista de seu ensino seguir a pedagogia ativa, quando os trabalhos ligados a seu ensino com o uso da tecnologia.

Mesmo a partir dos PCNs, a proposta de um ensino integrado com as outras áreas da matemática quando como aplicação a outros campos do conhecimento e à realidade do aluno, trouxe a geometria para o lugar que ela realmente merece.

Pensando nisso, no desinteresse dos alunos e em suas dificuldades em Matemática, a autora se viu motivada a trabalhar conteúdos geométricos contextualizados com situações cotidianas de forma a contribuir para o processo de ensino-aprendizagem.

Não há dúvidas de que os mosaicos encantam muita gente. Além de chamar atenção por sua beleza artística, pela história que carrega e tantos detalhes, há uma estrutura matemática extremamente rica que pode ser usada na sala de aula como um excelente suporte para o professor.

O presente trabalho tem como objetivo sugerir maneiras do professor de Matemática da Educação Básica poder utilizar o mosaico e as pavimentações do plano como motivação para o trabalho de Geometria em sala de aula e em conjunto com professores de Artes e de História.

No Capítulo 1 será falado do mosaico na arte ao longo de todos esses anos, desde as primeiras obras que se têm notícias, ou seja, será feita uma viagem no tempo tomando conhecimento de sua história e importância.

No Capítulo 2 será explorada a estrutura matemática presente nos mosaicos. Isto é, será feito um estudo sobre a pavimentação do plano com polígonos regulares, abordando conceitos geométricos como ponto, aresta, vértice, ângulos, polígonos, etc., incluindo as configurações que pavimentam o plano.

Através de um estudo sobre translação, rotação, reflexão e algumas combinações dessas transformações no plano serão mostradas, no capítulo 3, outras maneiras de pavimentá-lo que é usando simetrias.

Biografia e obras de M.C. Escher, bem como sua ligação com a Matemática serão abordadas no Capítulo 4. Nesse também serão encontradas propostas de atividades para serem aplicadas em turmas da Educação Básica.

Nas considerações finais será falada a importância de fazer esse trabalho, que poderá servir como subsídio para o professor de Matemática, e assuntos de Geometria que podem ser abordados com mosaicos. Será sugerido um projeto para ser realizado em conjunto com professores de outras áreas.

## CAPÍTULO 1. MOSAICO NA ARTE

Para a construção desse capítulo a autora se baseou em Mucci (1962, p. 19-108) e Sander (2012, p.5-57).

Mosaico é a arte de criar imagens com uma montagem de pequenos pedaços de vidro colorido, pedra ou outros materiais (SANDER, 2012, p.5).

Até os dias atuais, a origem da arte mosaica ainda é uma incógnita. Todavia, as obras mais antigas que se tem conhecimento foram encontradas na antiga cidade de Ur, na Mesopotâmia. Elas correspondem a um período de aproximadamente 3.500 anos a.C. e retrata costumes e cenas da vida sumeriana. Além dos sumerianos, os caldeus também usavam dessa arte na decoração de paredes.

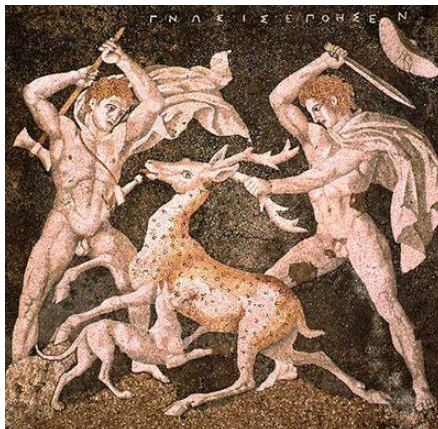
**Figura 1** – Artefato conhecido como o “Estandarte de Ur”



**Fonte:** Ensinar História.

A primeira assinatura reconhecida de um mosaicista (“Gnosis created”, do grego “ΓΝΩΣΙΣ ΕΠΟΗΣΕΝ”) refere-se ao famoso mosaico grego “uma caça ao veado”, do final do século IV a.C., sendo esse um detalhe do chão da Casa da Abdução de Helen, em Pella (Macedônia). Outros mosaicos desse século também são encontrados nessa região, na cidade de Aegae.

**Figura 2** – Mosaico do final do século IV a.C., “Uma caça ao veado”



**Fonte:** Furman University Scholar Exchange.

No século III a.C., a arte do mosaico foi expandida pela bacia do Mediterrâneo, devido ao surgimento de escolas no Antigo Egito. Motivos eram usados na decoração de sarcófagos, paredes e capitéis.

Na Grécia eram feitos pisos em mosaico e, embora essa arte tenha se desenvolvido ali do século IV ao I a.C. (período helenístico), é do século I a.C. ao século VI d.C. (período de dominação romana) que ela evoluiu.

São achados dessa época: o “Mosaico de Alexandre”, piso originário da Casa do Fauno, em Pompéia; “Os músicos ambulantes” e “A consulta”, assinados por Dioscorides de Samos, encontrados na Villa de Cícero, também em Pompéia; o mosaico de um golfinho da “Casa do Tridente”, em Delos; e as de Sosos de Pérgamo, “Doves drinking from a bowl”, que inspirou “As pombas de Plínio”, encontrada em Vila Adrianino, e “asarótos oikos (The unswept floor)”, decoração que retrata restos de comida no chão de uma sala de jantar (triclinium) depois de um banquete.

**Figura 3** – (a) “A consulta”, de Dioscorides de Samos. (b) “O Mosaico de Alexandre”, piso da Casa do Fauno



**a**



**b**

**Fonte:** (a) My Favourite Planet. (b) ArteRef.

Segundo Mucci (1962, p.30), em nenhum outro lugar como na antiga Roma, a decoração em mosaico foi tão largamente usada. Começou no Lácio, no século I a.C., em murais, painéis transportáveis, pisos e fontes, e estendeu-se a todo Império, sendo encontrada em termas, residências de luxo e edifícios públicos.

O mundo greco-helenístico influenciou Roma artística e culturalmente e, com isso, sua arte não foi independente até meados do século I a.C., quando houve uma busca por sua autenticidade. Entre os séculos I e II d.C. a arte romana atingiu seu desenvolvimento mor.

A obra mais antiga, conhecida como “Nile Mosaic of Palestrina”, era parte do piso de uma gruta artificial e representa o curso do rio Nilo desde a Etiópia ao mar Mediterrâneo, bem como o culto a Isis e Osiris.

**Figura 4 – “Nile mosaic of Palestrina”**



**Fonte:** An Archaeological World.

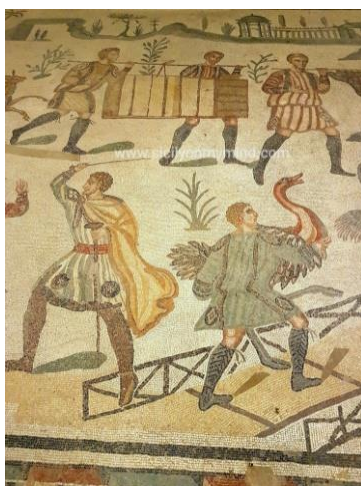
Na Pompéia, na entrada das residências tanto dos poderosos quanto do povo, foram encontrados mosaicos “cave canem” que continham a figura de um cachorro acorrentado, como aviso da presença de um cão de guarda (mesmo quando esse não existia), servindo para espantar possíveis intrusos. Também era comum encontrar, no centro dos quartos de dormir (cubiculum), uma decoração no piso representando o retrato de uma mulher, que provavelmente era a dona da casa (domina). Nas paredes e pisos das salas de jantar (triclinium) motivos de esqueletos representavam a morte. A filosofia Epicurista prescrevia esquecer na mesa os problemas da vida olhando para a imagem macabra da morte, por isso o costume de ter esse tipo de decoração. (MUCCI, 1962, p.32)

Os mosaicos de Óstia mostram a evolução dessa arte romana. Eles pavimentavam pisos e paredes e eram inspirados em deuses, criaturas mitológicas, formas geométricas, flores, peixes e outros animais marinhos, cenas de pesca e do cotidiano.

As Termas de Caracalla e o Palácio de Domiciano também foram ornados com mosaicos (geométricos e de escudos de amazonas, respectivamente). Entretanto, devido à importância de seus valores artísticos (livre de influências) e amplitude de superfície decorada, o lugar onde houve maior concentração da arte romana foi Piazza Armerina, na Sicília. A Villa Romana del Casale foi pavimentada por mestres e operários mosaicistas, cada

um responsável por determinado(s) cômodo(s). Hércules, suas vítimas, animais como lobos, leões, tigres etc, cena de caça tropical e ballet aquático foram temas de decoração. As principais obras são Labours of Hercules, Little Hunt, Great Hunting Scene, Circus Scene e Bikini Girls.

**Figura 5** – (a) Parte do mosaico “Great Hunting Scene”. (b) “Bikini Girls”, mosaico que retrata mulheres de biquíni praticando esporte



**a**



**B**

**Fonte:** (a) Ancient World Magazine. (b) Sicily On My Mind.

Motivos romanos foram achados em outras regiões além do Império, isto é,

[...] em todo lugar onde viveu uma comunidade romana, surgiram obras musivas descrevendo cenas de caça, lembrando paisagens, fixando episódios de batalhas, ou simplesmente enriquecendo, de formas geométricas, pavimentos de “Triclinia”, de Termas e de Templos. (MUCCI, 1962, p.30)

São exemplos: “The Circus Games Mosaic”, descoberto em Ainay Lyon, o painel “Sacrifício de Ifigenia”, que é cópia de uma pintura grega do século IV a.C., encontrado em Ampúrias (Gerona); e “The Four Seasons”, em Villa Zliten (Léptis Magna).

**Figura 6** – Obras (a) “The Four Seasons”. (b) “Sacrifício de Ifigenia”



**Fonte:** (a) Pinterest. (b) Visit Museum.

A arte do mosaico sofreu algumas mudanças no período paleocristão (século II - V d.C.), deixando de retratar o mundo pagão e passando a algo que convidava à devoção, que ilustrava a nova fé. A princípio era usada em catacumbas, mas depois começou a ornar paredes e tetos de basílicas.

Tal arte foi encontrada em Roma, no Mausoléu de Santa Costanza e na Basílica de Santa Pudenciana; no Vaticano, na Basílica de São Pedro e na Tumba dos Julii (Mausoléu M); em Milão, nas Basílicas de São Lourenço e de Santo Ambrosio; em Aquileia, na Basílica de Santa Maria Assunta; em Albenga, no batistério da cidade; em Grado, nas Basílicas de Santa Maria da Graça e de Santa Eufemia; e em Ravena, nas Basílicas de Santo Apolinário Novo, de São Vital e de São João Evangelista, no Mausoléu de Gala Placídia, nos Batistérios Neoniano e Ariano, e na Capela Arcebispal. As obras de alguns dos lugares citados acima, executadas antes do século IV, foram as poucas que restaram após as guerras e invasões dos bárbaros.

Outra região que teve sua arte muito afetada por ataques inimigos (entre outros aspectos) foi o Oriente. Achados desse período são os motivos da

Basílica da Natividade, em Belém; os da Igreja de São Lot e São Procópio, em Khirbet al-Mukhayyat (perto do Monte Nebo); o Mosaico dos Pássaros, em Jerusalém; e os da Antióquia.

Entre o final do século V e o início do VI a Basílica Vrina Plain foi construída em Butroto, na Albânia, e teve seu chão pavimentado com mosaico que representava o paraíso de Deus na terra através de motivos de árvores, flores, pássaros, criaturas marítimas etc. Na mesma época, porém estendendo-se ao século VIII, a cidade de Madaba (Jordânia) foi um importante centro da arte do mosaico. Segundo Sander (2012, p. 37), o Mapa de Madaba é a mais antiga representação da Terra Santa.

No período Bizantino, que teve início na segunda metade do século VI, o mosaico cristão alcançou seu maior desenvolvimento, influenciou a arte de outras regiões e foi amplamente usado em todo o mundo, podendo ser apreciado até hoje em Roma, Ravena, Veneza, Constantinopla, Monreale, Cefalú, Jerusalém, Islão, Rússia, dentre outros. Além de decorar Basílicas, também Mesquitas, edifícios, exteriores, móveis, caixas etc. foram ornados com mosaico.

**Figura 7** – Capela Palatina de Palermo



**Fonte:** Editora Mundo e Missão.

Essa arte entrou em decadência no século XV, sendo substituída quase totalmente por outros tipos, como a pintura e a escultura, que atendiam as exigências da arquitetura do renascimento da Europa. Até o século XIX valores e características das obras musivas se perderam em meio a tentativas de representar pinturas em mosaico, principalmente na Itália, Inglaterra e França (MUCCI, 1962, p.81). Entretanto, alguns artistas renascentistas como Paolo Uccello e Luigi di Pace preservaram as velhas técnicas.

Sabe-se que foram usados mosaicos na ornamentação de edifícios islâmicos em Bukhara (século XVI-XVII), na Mesquita Shah em Isfahan (séc. XVII) e na Basílica de São Pedro no Vaticano (séc. XVII-XIX).

**Figura 8** – Mosaico da Basílica de São Pedro, no Vaticano, que é replica da pintura “A Transfiguração” de Raphael Sanzio



Fonte: Pinterest.

Notáveis mosaicos do século XIX incluem os de Edward Burne-Jones em St. Paul's Within the Walls, em Roma (SANDER, 2012, p. 57). Nessa mesma época a arte de herança greco-romana passou a ser usada na pavimentação de calçadas em Portugal. Com motivos de diferentes formas, inclusive geométricas, esse tipo de decoração chega ao Rio de Janeiro (Brasil) no início do século XX, espalhando-se por toda cidade e também pelo país.

**Figura 9** – (a) Calçada da Avenida Rio Branco, no Rio de Janeiro. (b) Largo São Sebastião, em Manaus.



**a**



**b**

**Fonte:** (a) O Globo. (b) Blog do Claudemir Andrade.

O retorno da arte do mosaico, segundo Mucci (1962),

[...] caracteriza-se por seu sentido de aplicação ilimitado; o gosto pela decoração mosaica não é mais restrito aos edifícios sacros, como aconteceu nos períodos paleocristão e bizantino, mas estendeu-se livremente a todo panorama arquitetônico moderno. (p.105)

Escolas especializadas em mosaico surgiram e artistas como o espanhol Santiago Padrós Elías, a norte-americana Sonia King, o brasileiro Marcelo de Melo, o mexicano Diego Rivera, a britânica Emma Biggs e o francês Jean René Bazaine contribuíram para o renascimento e continuação dessa arte. Mais ainda, ela vem sendo usada como meio de expressão artística por toda parte do mundo em suas mais variadas formas.

**Figura 10** – (a) Cúpula da Basílica do Valle de los Caídos, por Santiago Padrós Elías. (b) “Running Rug” de Marcelo Melo. (c) “Spinoff” de Sonia King



**a**



**b**



**c**

**Fonte:** (a) Fundación Nacional Francisco Franco. (b) Mosaicos do Brasil. (c) Sonia King Mosaic Artist.

## **CAPÍTULO 2. PAVIMENTAÇÕES DO PLANO**

As seções deste capítulo foram baseadas em Barbosa (1993, p. 3-35).

Quando um conjunto finito de polígonos cobre uma região poligonal simples fechada do plano sem que haja superposição ou lacunas, temos uma *pavimentação parcial* do plano.

Ao aumentar a superfície de uma pavimentação parcial do plano, a partir do acréscimo indefinido de polígonos, sem que haja superposição ou lacunas,

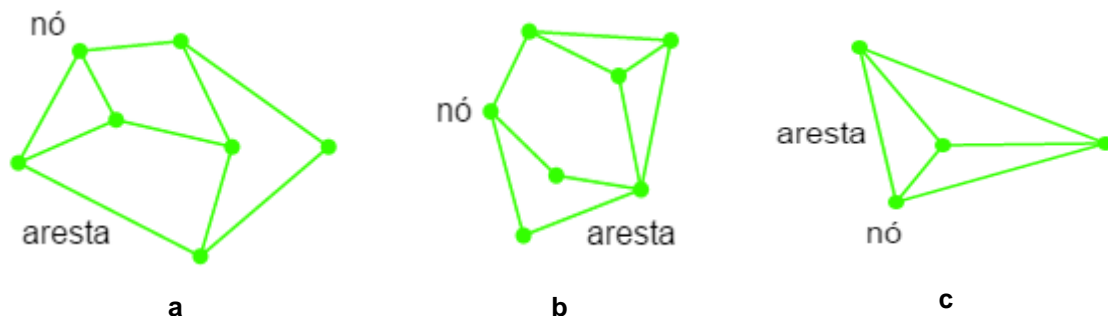
obtemos uma *pavimentação do plano*. Como a superfície do plano é infinita e pavimentá-la por completo é impossível, podemos obter uma *pavimentação ideal do plano*. Assim, se um conjunto de polígonos cobre o plano sem que haja vazios e nem justaposição, esse conjunto é uma *pavimentação do plano*.

## 2.1. Alguns conceitos

Chamamos os vértices dos polígonos de *nós* da pavimentação, e os lados de *arestas*. A configuração ordenada de polígonos ao redor de um nó é denominada *arranjo*.

Uma pavimentação é **lado-lado** se toda aresta é lado comum a dois polígonos. Ela é dita **arquimediana** se todos os nós dispõem o mesmo número de arestas concorrentes e **platônica** se todos os polígonos têm o mesmo número de lados e também é lado-lado e arquimediana.

**Figura 11** – (a) Pavimentação lado-lado. (b) Pavimentação arquimediana. (c) Pavimentação platônica



**Fonte:** Autoria própria.

Se a pavimentação é platônica, porém todos os polígonos ao redor de um nó são sempre os mesmos e na mesma disposição, dizemos que ela é **uniforme**. Assim, uma pavimentação é dita *k-uniforme* se apresenta *k* tipos de arranjos.

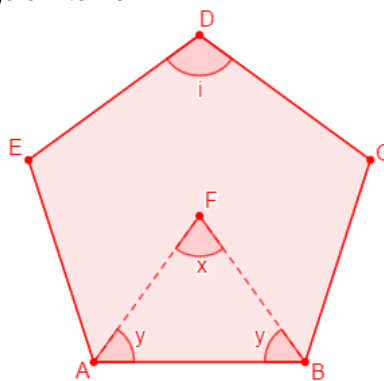
Neste trabalho abordaremos todas as pavimentações do tipo 1-uniforme e alguns exemplos do tipo 2-uniforme. Para um estudo mais profundo sobre as pavimentações *k*-uniformes consulte Silva et al. (1994).

## 2.2. Pavimentação com polígonos regulares de um único tipo

Como vimos anteriormente, para que uma pavimentação do plano aconteça os polígonos não podem sobrepor-se e nem deve haver espaços entre eles. Assim, para que haja uma pavimentação, a soma de todos os ângulos internos dos polígonos regulares ao redor de um nó deve ser  $360^\circ$  (LOURENÇO, 2014, p. 22).

Observe a figura abaixo:

**Figura 12** – Polígono com ângulo interno



**Fonte:** Autoria própria.

O ângulo central  $x$  de qualquer polígono regular de  $n$  lados é  $x = 360^\circ/n^1$  e seu ângulo interno  $i = 2y$ . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , temos que:

$$x + 2y = 180^\circ \Rightarrow 2y = 180^\circ - x \Rightarrow i = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow i = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n}$$
$$\Rightarrow i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

Supondo que  $p$  polígonos regulares congruentes se ajustam ao redor de um ponto, devemos ter  $p \cdot i = 360^\circ$ . Mas  $i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ , então:

$$p \cdot \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ \Rightarrow p = \frac{360^\circ \cdot n}{(n-2) \cdot 180^\circ} \Rightarrow p = \frac{2 \cdot n}{n-2}.$$

---

<sup>1</sup> DOLCE, O., POMPEO, N. **Fundamentos da Matemática Elementar**, v.9, São Paulo: Atual Editora.

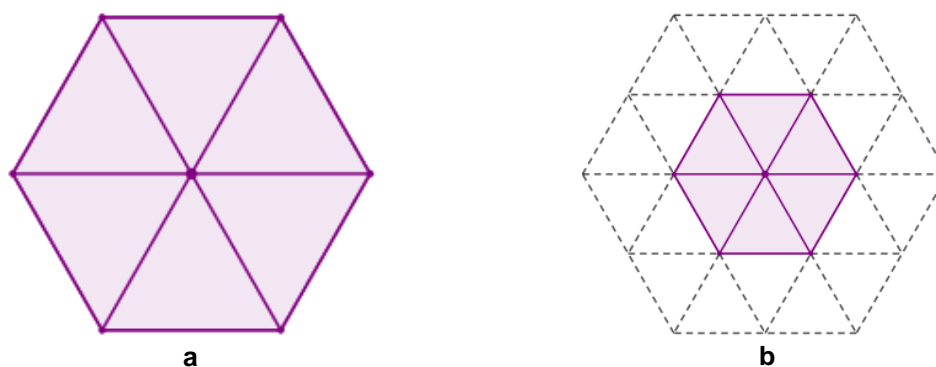
Todavia,  $p \geq 3$ , pois com apenas 1 ou 2 polígonos ao redor de um nó não há pavimentação, dado que não existem polígonos regulares com ângulos internos maiores ou iguais a  $180^\circ$ .

$$\text{Assim, } \frac{2n}{n-2} \geq 3 \text{ ou } 2n \geq 3(n-2) \Rightarrow 2n - 3n \geq -6 \Rightarrow n \leq 6.$$

Logo, os possíveis valores de  $n$  são 3, 4, 5 e 6.

Quando  $n = 3$ , temos  $p = \frac{2 \cdot 3}{3-2} = 6$ . Portanto, podemos ajustar seis triângulos equiláteros ao redor de um ponto.

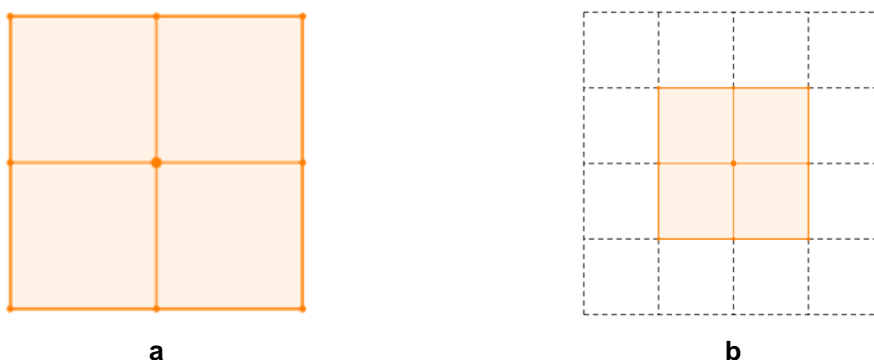
**Figura 13** – (a) Triângulos equiláteros ao redor de um ponto. (b) Pavimentação por triângulos equiláteros



**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n = 4$ , temos  $p = \frac{2 \cdot 4}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$ . Portanto, podemos ajustar quatro quadrados ao redor de um ponto.

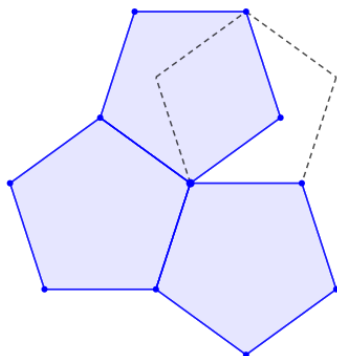
**Figura 14** – (a) Quadrados ao redor de um ponto. (b) Pavimentação por quadrados



**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n = 5$ , temos  $p = \frac{2 \cdot 5}{5 - 2} = \frac{10}{3} = 3,3333 \dots$ . Portanto, não podemos ajustar pentágonos regulares ao redor de um ponto, pois  $p$  tem que ser um número inteiro.

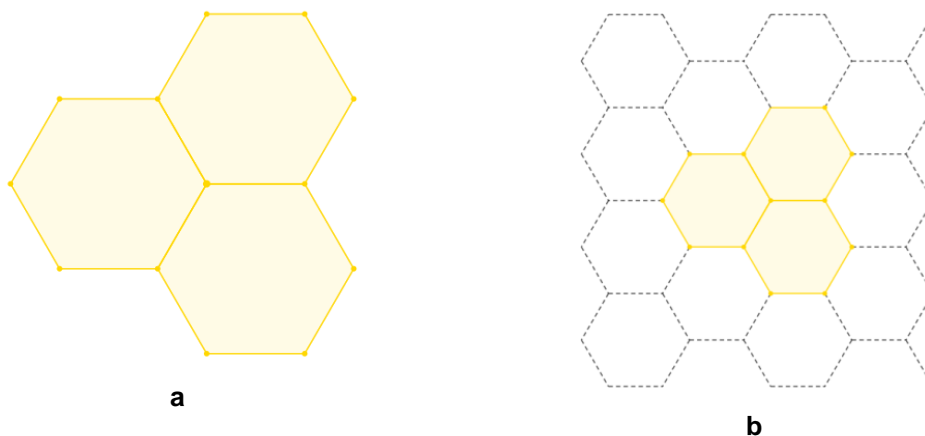
**Figura 15** – Pentágono regular (não pavimenta o plano)



**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n = 6$ , temos  $p = \frac{2 \cdot 6}{6 - 2} = \frac{12}{4} = 3$ . Portanto, podemos ajustar três hexágonos regulares ao redor de um ponto.

**Figura 16** – (a) Hexágonos regulares ao redor de um ponto. (b) Pavimentação por hexágonos



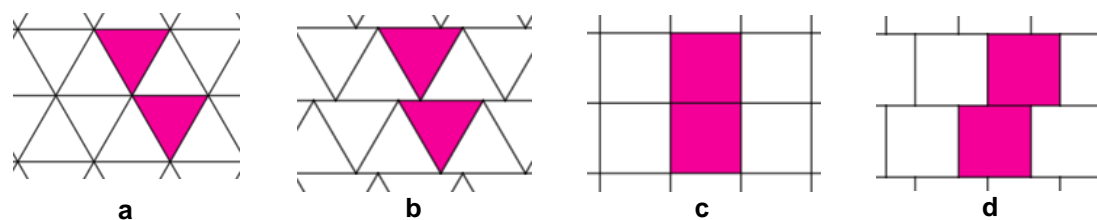
**Fonte:** Autoria própria.

Assim, os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares são os únicos polígonos regulares que formam pavimentações de um só tipo, sendo estas arquimedianas, uniformes e platônicas.

### 2.3. Padrões regulares e duais

Nas figuras 17a, 17b, 17c e 17d são apresentadas pavimentações com triângulos equiláteros e quadrados, respectivamente. Entretanto, podemos observar que os padrões dessas pavimentações diferem entre si:

**Figura 17** – (a) e (b) Pavimentações com triângulos equiláteros. (c) e (d) Pavimentações com quadrados

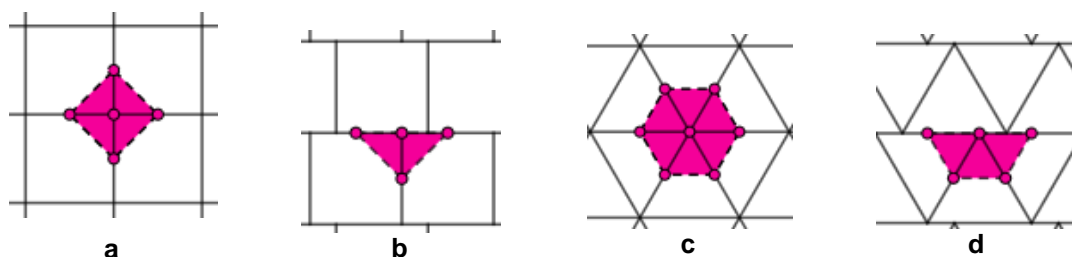


**Fonte:** Autoria própria.

Ao marcarmos os pontos médios dos lados dos polígonos que concorrem em um nó qualquer, chamamos de **figura-vértice** o polígono que possui esses pontos médios como vértices.

Observe quais polígonos encontramos como figuras-vértice dos padrões abaixo:

**Figura 18** – (a) Quadrados. (b) Triângulos isósceles. (c) Hexágonos regulares. (d) Trapézios isósceles



**Fonte:** Autoria própria.

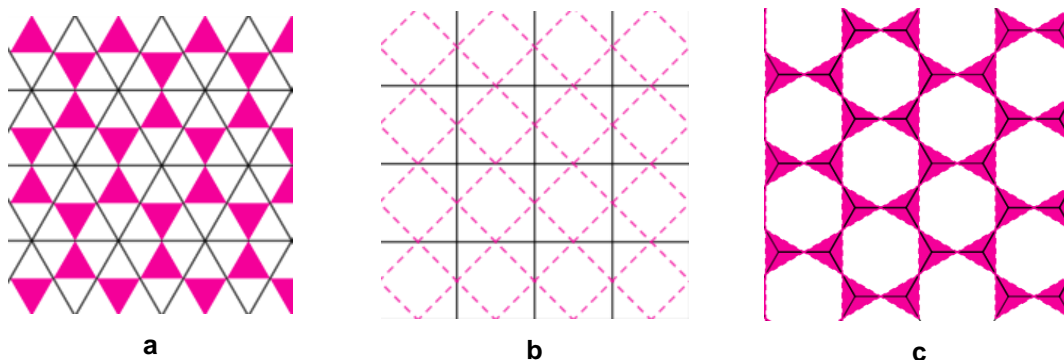
Daí, um padrão de pavimentação é **padrão regular** se, e só se, as figuras-vértice do padrão são polígonos regulares.

Assim sendo, os padrões das figuras 8a e 8c são regulares e os das figuras 8b e 8d são padrões *não regulares*.

Já na pavimentação com hexágonos regulares, os padrões também são regulares, pois qualquer figura-vértice é triângulo equilátero.

Observe as pavimentações que obtemos ao fazer todas as figuras-vértice no padrão regular de triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, respectivamente:

**Figura 19** – (a) Pavimentação com hexágonos regulares e triângulos equiláteros. (b) Pavimentação de quadrados com padrão regular. (c) Pavimentação com triângulos equiláteros e hexágonos regulares

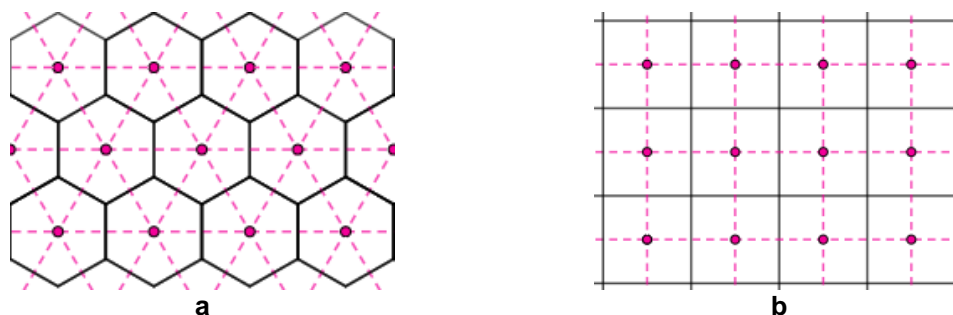


**Fonte:** Autoria própria.

Por haver semelhança entre os padrões regulares dos triângulos equiláteros e os dos hexágonos regulares em relação às figuras-vértice, a esses chamamos *afins* e, portanto, aos padrões regulares de quadrados *auto-afins*.

Para obter os **padrões duais** dos padrões regulares com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, traçamos as arestas correspondentes a cada dois pontos centrais contíguos, portanto perpendiculares aos lados:

**Figura 2021** – (a) Padrões (3, 3, 3, 3, 3, 3) e (6, 6, 6). (b) Padrão (4, 4, 4, 4)



**Fonte:** Autoria própria.

Do padrão (3, 3, 3, 3, 3, 3) obtemos o padrão dual (6, 6, 6) e do padrão (6, 6, 6) obtemos o padrão dual (3, 3, 3, 3, 3, 3). Logo, esses padrões são chamados *duais-recíprocos*. Enquanto que do padrão (4, 4, 4, 4) obtemos o padrão dual (4, 4, 4, 4), ou seja, esse padrão é *auto-dual*.

## 2.4. Pavimentação com polígonos regulares de diferentes tipos

Se  $p$  polígonos regulares se ajustam ao redor de um ponto e, como o triângulo equilátero é o polígono regular que possui o menor ângulo interno ( $60^\circ$ ), o maior valor de  $p$  é  $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ . Ou seja, podemos reunir seis triângulos equiláteros ao redor de um ponto, como já visto. Além disso,  $p \geq 3$ , o que implica  $3 \leq p \leq 6$ .

Vejamos caso por caso:

### 1º. caso: 3 polígonos regulares ( $p = 3$ )

Seja  $n_p$  o número de lados dos polígonos regulares e  $i_p$  o ângulo interno de cada um desses polígonos. Da seção 2.2 temos:

$$i_p = \frac{(n_p - 2) \cdot 180^\circ}{n_p} = \frac{180^\circ n_p - 360^\circ}{n_p} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n_p} = 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_p}\right).$$

Sabemos que a soma dos ângulos internos dos  $p$  polígonos ao redor do nó deve ser igual a  $360^\circ$ . Portanto, para  $p = 3$ ,

$$\begin{aligned} 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) &= 360^\circ \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) &= 2 \Rightarrow 3 - \frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_2} - \frac{2}{n_3} = 2 \\ \Rightarrow -2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right) &= 2 - 3 \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Para encontrar as soluções da equação (2.1), vamos primeiramente supor  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ .

Como  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$  temos que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{n_1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow n_1 \leq 6.$$

Entretanto, como  $n_p$  representa o número de lados de um polígono regular, o menor valor que  $n_1$  assume é 3. Logo,  $3 \leq n_1 \leq 6$ .

De (2.1) também obtemos:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{(n_1 - 2)}{2n_1}. \quad (2.2)$$

Como  $n_2 \leq n_3$ , então

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geq \frac{(n_1 - 2)}{2n_1} \Rightarrow \frac{2}{n_2} \geq \frac{(n_1 - 2)}{2n_1} \Rightarrow n_2 \leq \frac{4n_1}{(n_1 - 2)}. \quad (2.3)$$

Vejamos, agora, as possíveis soluções da equação (2.1):

Quando  $n_1 = 3$ , ou seja, um dos polígonos é um triângulo equilátero, obtemos de (2.2) que:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{(3 - 2)}{2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{n_2} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{(n_2 - 6)}{6n_2}.$$

Portanto,  $n_2 > 6$ , pois, caso contrário,  $n_2$  ou  $n_3$  seria negativo ou nulo (o que não pode ocorrer dado que estes representam números de lados de um polígono).

Pela equação (2.3), temos  $n_2 \leq \frac{4 \times 3}{(3-2)} \Rightarrow n_2 \leq 12$ .

Logo,  $7 \leq n_2 \leq 12$ .

Lembrando que  $n_p$  é inteiro, fazendo os devidos cálculos encontramos:

**Tabela 1** – Soluções da equação (2.1) para  $n_1 = 3$

$n_1$	$n_2$	$n_3$
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12

**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n_1 = 4$ , ou seja, um dos polígonos é um quadrado, obtemos de (2.2) que:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{2}{8} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n_2} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{(n_2 - 4)}{4n_2}.$$

Portanto,  $n_2 > 4$ .

Pela equação (2.3), temos  $n_2 \leq \frac{4 \times 4}{(4-2)} \Rightarrow n_2 \leq 8$ .

Logo,  $5 \leq n_2 \leq 8$ .

Lembrando que  $n_p$  é inteiro, fazendo os cálculos devidos encontramos:

**Tabela 2** – Soluções da equação (2.1) para  $n_1 = 4$

$n_1$	$n_2$	$n_3$
4	5	20
4	6	12
4	8	8

**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n_1 = 5$ , ou seja, um dos polígonos é um pentágono, de (2.2) obtemos:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{(5-2)}{2 \cdot 5} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{n_2} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{(3n_2 - 10)}{10n_2}.$$

Logo,  $n_2 \geq 4$ . Porém,  $n_1 \leq n_2$ . Então assumimos  $n_2 \geq 5$ .

Por (2.3), temos  $n_2 \leq \frac{4 \times 5}{(5-2)} \Rightarrow n_2 \leq 6$ .

Como  $n_p$  é inteiro, fazendo os cálculos devidos encontramos:

**Tabela 3** – Soluções da equação (2.1) para  $n_1 = 5$

$n_1$	$n_2$	$n_3$
5	5	10

**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n_1 = 6$ , ou seja, um dos polígonos é um hexágono, obtemos de (2.2) que:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{(6-2)}{2 \cdot 6} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n_2} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{(n_2 - 3)}{3n_2}.$$

Portanto,  $n_2 \geq 4$ . Como  $n_1 \leq n_2$ , assumimos  $n_2 \geq 6$ .

Mas, por (2.3),  $n_2 \leq \frac{4 \times 6}{(6-2)} \Rightarrow n_2 \leq 6$ .

Logo,  $n_2 = 6$  e, conseqüentemente,  $n_3 = 6$ , formando assim o arranjo já visto de três hexágonos ao redor de um nó.

2º. caso: 4 polígonos regulares ( $p = 4$ )

Nesse caso, os polígonos terão  $n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$  lados. Então,

$$\begin{aligned} 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) &= 360^\circ \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) &= 2 \Rightarrow 4 - \frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_2} - \frac{2}{n_3} - \frac{2}{n_4} = 2 \\ \Rightarrow -2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right) &= 2 - 4 \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Suponha que  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ .

Como  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$  tiramos de (2.4) que:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{n_1} \geq 1 \Rightarrow n_1 \leq 4.$$

Mas  $n_1 \geq 3$ . Então, temos que  $n_1 = 3$  e  $n_1 = 4$ .

Da equação (2.4) também encontramos:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{(n_1 - 1)}{n_1}. \quad (2.5)$$

Como  $n_2 \leq n_3 \leq n_4$  tiramos de (2.5) que:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geq \frac{(n_1 - 1)}{n_1} \Rightarrow \frac{3}{n_2} \geq \frac{(n_1 - 1)}{n_1} \Rightarrow n_2 \leq \frac{3n_1}{(n_1 - 1)}.$$

Se  $n_1 = 3$ ,  $n_2 \leq \frac{3 \times 3}{(3-1)} \Rightarrow n_2 \leq 4.5$ . Mas  $n_1 \leq n_2$ , então  $n_2 = 3$  ou  $n_2 = 4$ .

Se  $n_1 = 4$ ,  $n_2 \leq \frac{3 \times 4}{(4-1)} \Rightarrow n_2 \leq 4$ . Porém,  $n_1 \leq n_2$ , então  $n_2 = 4$ .

Vejamos esses subcasos:

Quando  $n_1 = 3$  e  $n_2 = 3$ , ou seja, dois dos polígonos são triângulos equiláteros, substituindo esses valores em (2.4) temos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n_4} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{n_4} = \frac{3n_3 - 2n_3 - 3}{3n_3} \Rightarrow \frac{1}{n_4} = \frac{(n_3 - 3)}{3n_3}.$$

Daí  $n_3 \geq 4$ .

Como  $n_3 \leq n_4$ , de (2.5) temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{(3-1)}{3} \Rightarrow \frac{2}{n_3} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow n_3 \leq 6.$$

Logo,  $4 \leq n_3 \leq 6$ .

Como  $n_p$  é inteiro, fazendo os devidos cálculos encontramos:

**Tabela 4** – Soluções da equação (2.4) para  $n_1 = 3$  e  $n_2 = 3$

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
3	3	4	12
3	3	6	6

**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n_1 = 3$  e  $n_2 = 4$ , ou seja, um polígono é um triângulo equilátero e o outro é um quadrado, ao substituir esses valores em (2.4) encontramos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \Rightarrow \frac{7}{12} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n_4} = \frac{5}{12} - \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{n_4} = \frac{(5n_3 - 12)}{12n_3}.$$

Assim,  $n_3 \geq 3$ . Entretanto,  $n_2 \leq n_3$ , então assumimos  $n_3 \geq 4$ .

Como  $n_3 \leq n_4$ , de (2.5) temos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{(3-1)}{3} \Rightarrow \frac{2}{n_3} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{n_3} \geq \frac{5}{12} \Rightarrow n_3 \leq 4.$$

Portanto  $n_3 = 4$ .

Logo, encontramos:

**Tabela 5** – Soluções da equação (2.4) para  $n_1 = 3$  e  $n_2 = 4$

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
3	4	4	6

**Fonte:** Autoria própria.

Quando  $n_1 = n_2 = 4$ , ou seja, dois polígonos são quadrados, da equação (2.4) temos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{n_4} = \frac{(n_3 - 2)}{2n_3}.$$

Daí  $n_3 \geq 3$ . Mas  $n_2 \leq n_3$ , então  $n_3 \geq 4$ .

Como  $n_3 \leq n_4$ , da equação (2.5) temos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{(4-1)}{4} \Rightarrow \frac{2}{n_3} \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow n_3 \leq 4.$$

Conseqüentemente,  $n_4 = 4$ , o que resulta na configuração já vista de quatro quadrados ao redor de um nó.

3º. caso: 5 polígonos regulares ( $p = 5$ )

Sejam  $n_1, n_2, n_3, n_4$  e  $n_5$  o número de lados desses polígonos. Temos:

$$180^\circ \cdot \left[ \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_5}\right) \right] = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_5}\right) = 2$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_2} - \frac{2}{n_3} - \frac{2}{n_4} - \frac{2}{n_5} = 2 \Rightarrow -2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5}\right) = 2 - 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}. \quad (2.6)$$

Supondo que  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$ , temos

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{n_1} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow n_1 \leq \frac{10}{3}.$$

Isso implica em  $n_1 \leq 3$ .

Como o menor número de lados de um polígono regular é 3, então  $n_1 \geq$

3. Assim,  $n_1 = 3$ .

Substituindo em (2.6):

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6}. \quad (2.7)$$

Como  $n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$ , encontramos

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geq \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{4}{n_2} \geq \frac{7}{6} \Rightarrow n_2 \leq \frac{24}{7}.$$

Logo,  $n_2 \leq 3$ . Mas  $n_2 \geq 3$ , então  $n_2 = 3$ .

Substituindo em (2.7), temos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6}. \quad (2.8)$$

Como  $n_3 \leq n_4 \leq n_5$ , teremos que

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{3}{n_3} \geq \frac{5}{6} \Rightarrow n_3 \leq \frac{18}{5}.$$

Assim,  $n_3 \leq 3$ . Porém, sabemos que  $n_3 \geq 3$ . Logo,  $n_3 = 3$ .

Substituindo o valor encontrado em (2.8):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2}.$$

Como  $n_4 \leq n_5$ , segue que

$$\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_4} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{n_4} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow n_4 \leq 4.$$

Então,  $3 \leq n_4 \leq 4$ .

Se  $n_4 = 3$ , temos  $\frac{1}{3} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow n_5 = 6$ .

Se  $n_4 = 4$ , temos  $\frac{1}{4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow n_5 = 4$ .

Portanto:

**Tabela 6** – Soluções da equação (2.6)

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4

**Fonte:** Autoria própria.

#### 4º. caso: 6 polígonos regulares ( $p = 6$ )

Essa configuração foi estudada anteriormente. É um arranjo que envolve um só tipo de polígonos regulares, o triângulo equilátero.

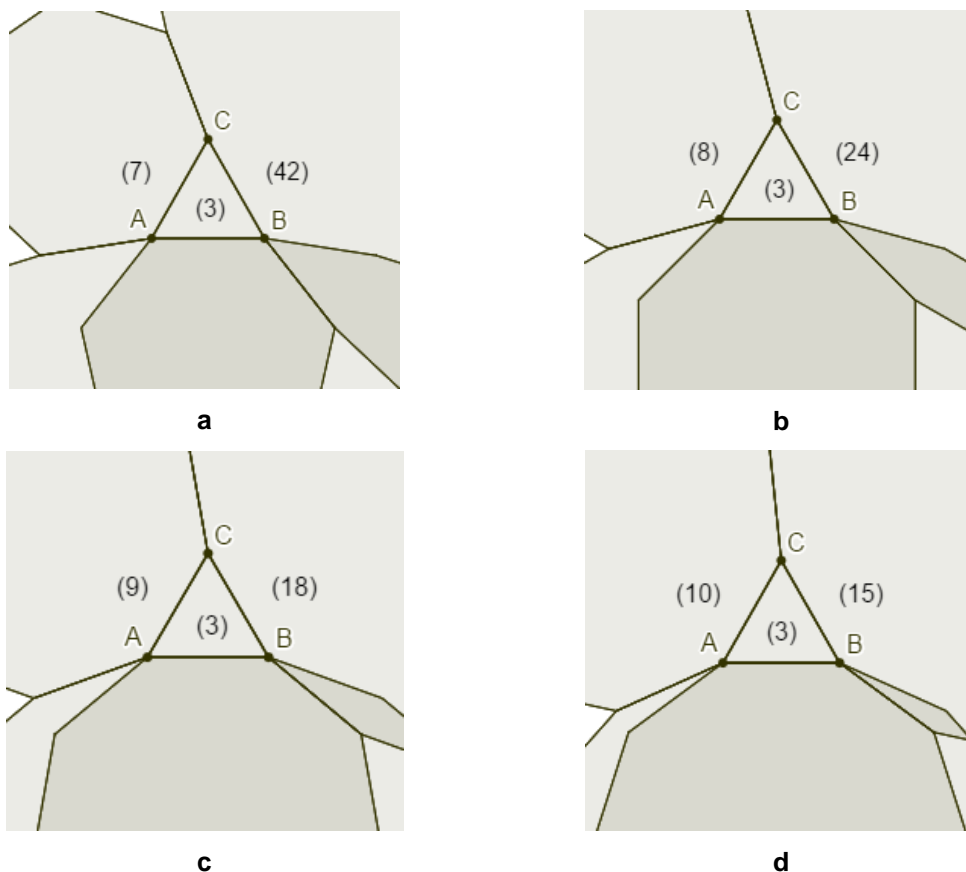
Como visto no início dessa seção, o maior valor que  $p$  assume é 6. Portanto, não existe configuração possível para  $p \geq 7$  e uma outra maneira de verificar isso é dar continuidade aos cálculos acima, o que fica como sugestão de atividade.

Ao todo, encontramos 14 possibilidades de configurações. Vejamos quais pavimentam o plano.

### 2.4.1. Analisando as possibilidades

As configurações (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18) e (3, 10, 15) possuem um triângulo equilátero cada, que chamamos de triângulo ABC na figura 21. Embora a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor do nó C dê  $360^\circ$ , isso não acontece ao redor dos nós A e B ao tentarmos pavimentar o plano. Podemos observar que ou a soma é menor que  $360^\circ$ , ficando assim uma lacuna entre os polígonos, ou ela é maior e os polígonos se sobrepõem. Portanto, essas configurações não pavimentam o plano.

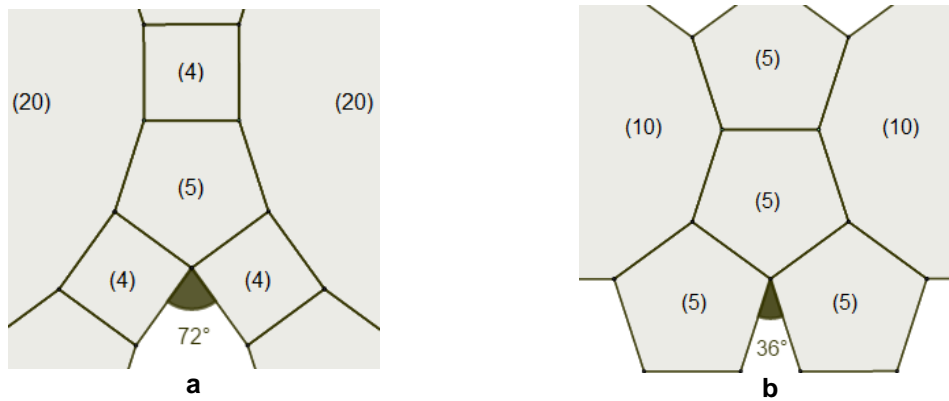
**Figura 22** – (a) Configuração (3, 7, 42). (b) (3, 8, 24). (c) (3, 9, 18). (d) (3, 10, 15)



**Fonte:** Autoria própria.

Observe as seguintes figuras:

**Figura 23** – (a) Configuração (4, 5, 20). (b) Configuração (5, 5, 10)



**Fonte:** Autoria própria.

Como  $72^\circ$  e  $36^\circ$  não são ângulos internos dos polígonos que correspondem a tais configurações, essas também não pavimentam o plano.

Assim, das configurações encontradas anteriormente, 8 pavimentam o plano e são elas:

**Tabela 7** – Configurações que pavimentam o plano

Nº	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
1	3	12	12		
2	4	6	12		
3	4	8	8		
4	3	3	4	12	
5	3	3	6	6	
6	3	4	4	6	
7	3	3	3	3	6
8	3	3	3	4	4

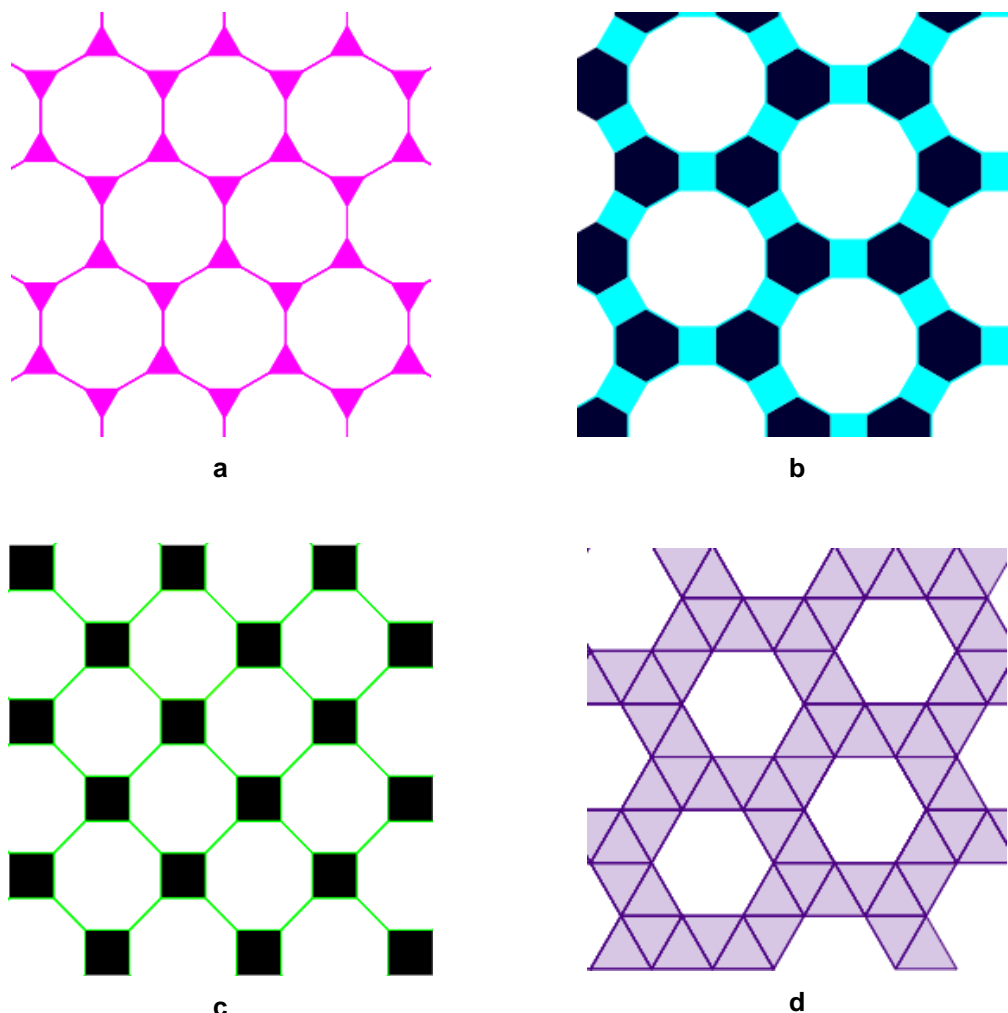
**Fonte:** Autoria própria.

#### 2.4.2. Pavimentando o plano

Da configuração número 1 da tabela 7 temos os arranjos (3, 12, 12), (12, 3, 12) e (12, 12, 3), que geram o mesmo padrão (observe a figura 23a). Isso também ocorre ao pavimentarmos o plano com os possíveis arranjos das configurações de número 2, 3 e 7 da referida tabela (figuras 23b, 23c e 23d). Então, podemos escolher apenas um arranjo de cada configuração para nos

referirmos aos padrões gerados, por exemplo,  $(3, 12, 12)$ ,  $(4, 6, 12)$ ,  $(4, 8, 8)$  e  $(3, 3, 3, 3, 6)$ . Como cada um desses arranjos sozinho pavimenta o plano, essas pavimentações são do tipo 1-uniformes.

**Figura 24** – (a)  $(3, 12, 12)$ . (b)  $(4, 6, 12)$ . (c)  $(4, 8, 8)$ . (d)  $(3, 3, 3, 3, 6)$



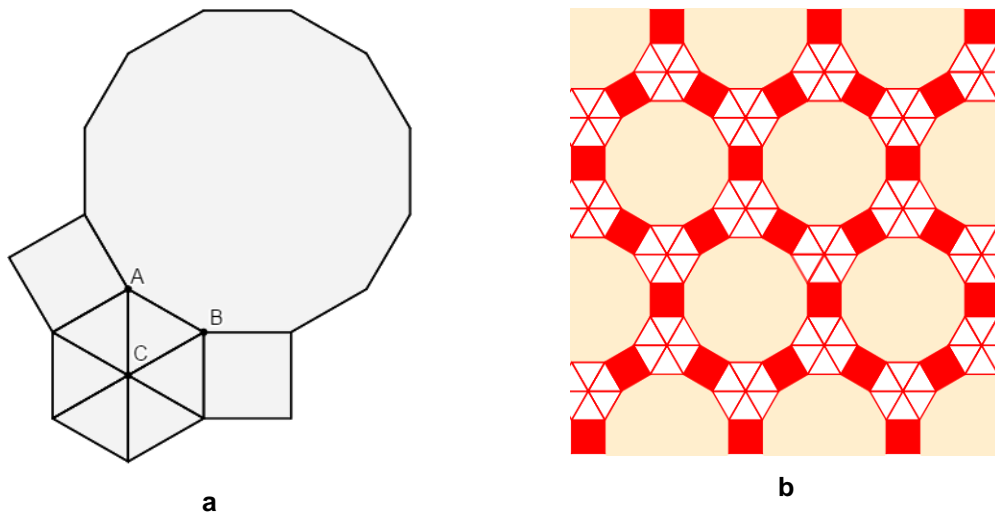
**Fonte:** Autoria própria.

Ao tentarmos pavimentar o plano com os possíveis arranjos da configuração número 4 da tabela 7 encontramos dois padrões e, assim como fizemos anteriormente, aqui escolhemos os arranjos  $(3, 3, 4, 12)$  e  $(3, 4, 3, 12)$  para nos referirmos a tais padrões.

Na figura 24a, fazemos o arranjo  $(3, 3, 4, 12)$  ao redor do nó A, mas para que o padrão se repita em B devemos inverter seu sentido. Consequentemente, temos 3 triângulos equiláteros de vértice comum C e, assim, não é mais possível esse arranjo. Logo,  $(3, 3, 4, 12)$  sozinho não

pavimenta o plano, sendo então necessário combiná-lo com o arranjo (3, 3, 3, 3, 3) (figura 24b). A pavimentação formada é do tipo 2-uniforme.

**Figura 25** – (a) Arranjo (3, 3, 4, 12). (b) Combinação dos arranjos (3, 3, 4, 12) e (3, 3, 3, 3, 3)

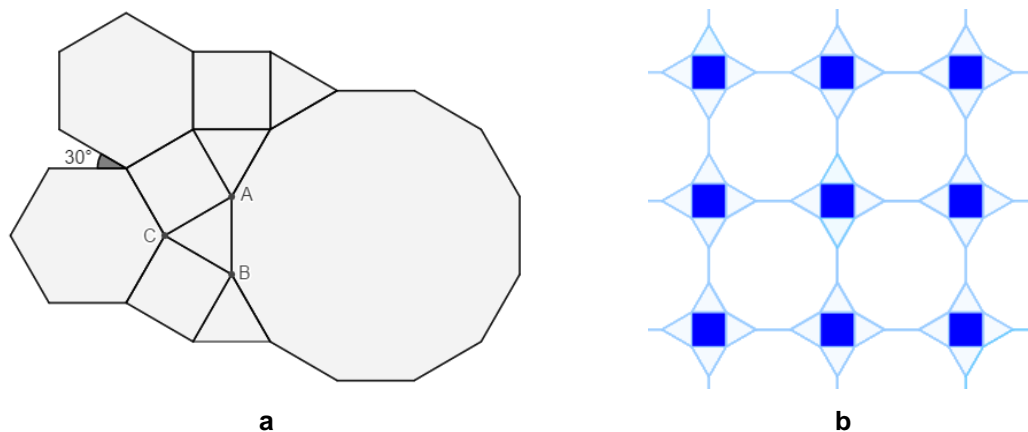


**Fonte:** Autoria própria.

Note que o padrão obtido na figura 24b é mesmo padrão da figura 23b com o arranjo (4, 6, 12).

Na figura 25a, fazemos o arranjo (3, 4, 3, 12) ao redor do nó A e, quando repetido ao redor de B, no mesmo sentido, obtemos o ponto C e ao redor desse, necessariamente, teremos o arranjo (3, 4, 6, 4). Portanto, (3, 4, 3, 12) sozinho não pavimenta o plano. Se continuarmos o padrão desta figura veremos que a combinação dos arranjos (3, 4, 3, 12) e (3, 4, 6, 4) também não pavimenta o plano, uma vez que  $30^\circ$  não é ângulo interno de nenhum polígono desses arranjos. Contudo, é possível a combinação de (3, 4, 3, 12) com (3, 12, 12), como vemos na figura 25b. Essa pavimentação é dita 2-uniforme.

**Figura 26** – (a) Arranjo (3, 4, 3, 12). (b) Combinação dos arranjos (3, 4, 3, 12) e (3, 12, 12)

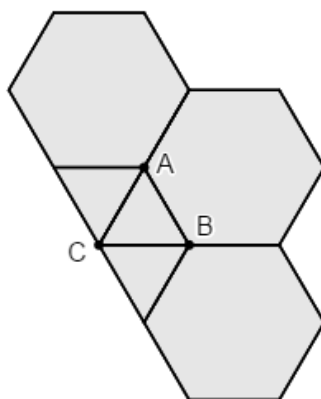


**Fonte:** Autoria própria.

Da configuração número 5, os arranjos (3, 3, 6, 6) e (3, 6, 3, 6) pavimentam o plano (os demais geram os mesmos padrões que esses citados).

Como podemos ver na figura 26, o arranjo (3, 3, 6, 6) sozinho não pavimenta o plano, pois ao fazê-lo ao redor dos nós A e B obtemos 3 triângulos equiláteros com vértice comum C e daí não é mais possível o mesmo arranjo.

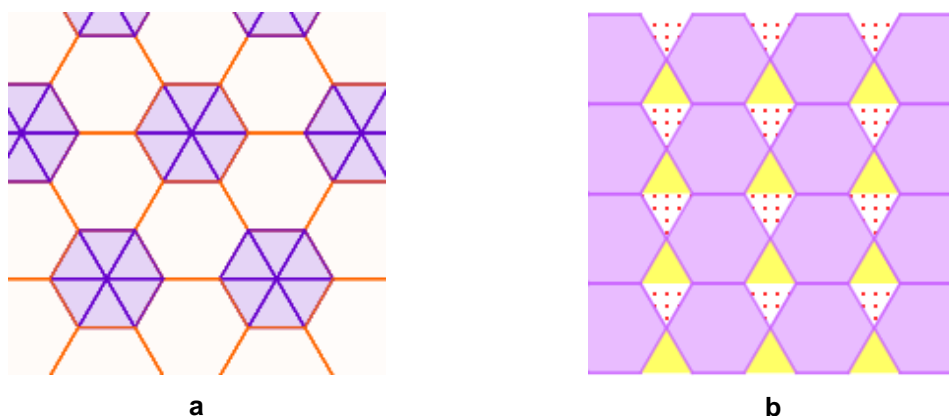
**Figura 27** – Configuração (3, 3, 6, 6)



**Fonte:** Autoria própria.

Porém, se combinarmos (3, 3, 6, 6) com o arranjo (3, 3, 3, 3, 3, 3), bem como com (3, 6, 3, 6), encontraremos padrões que pavimentam o plano. Tais pavimentações são do tipo 2-uniforme. Veja:

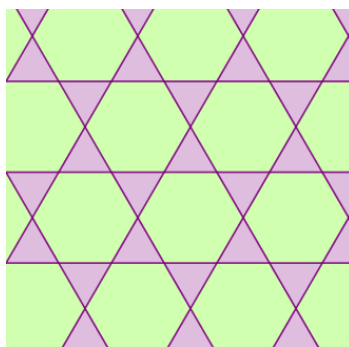
**Figura 28** – (a) Combinação dos arranjos (3, 3, 6, 6) com (3, 6, 3, 6). (b) (3, 3, 6, 6) com (3, 3, 3, 3, 3, 3)



**Fonte:** Autoria própria.

Como podemos observar abaixo, o arranjo (3, 6, 3, 6) pavimenta o plano sozinho. Logo, temos uma pavimentação 1-uniforme.

**Figura 29** – Pavimentação do plano com o arranjo (3, 6, 3, 6)

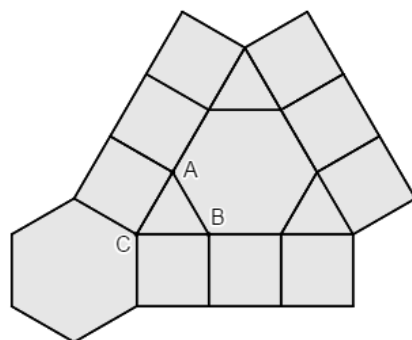


**Fonte:** Autoria própria.

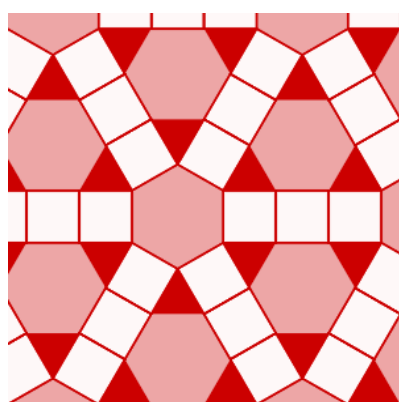
Algumas possibilidades dos arranjos da configuração 6 formam o padrão do arranjo (3, 4, 4, 6) e outras o de (3, 4, 6, 4).

Na figura 29a, fazemos o arranjo (3, 4, 4, 6) ao redor de um nó A e, para que este se repita ao redor de B, invertemos seu sentido e obtemos o nó C ao redor do qual necessariamente teremos o arranjo (3, 4, 6, 4). Logo, (3, 4, 4, 6) só pavimenta o plano se combinado com (3, 4, 6, 4), formando assim uma pavimentação 2-uniforme. A combinação desses dois arranjos gera dois padrões, como podemos ver nas figuras 29b e 29c.

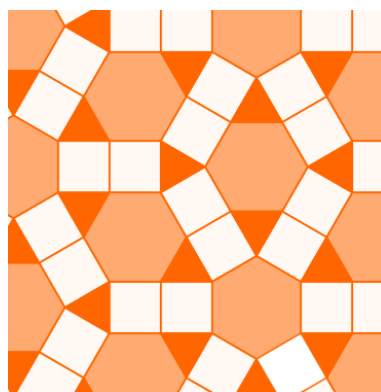
**Figura 30** – (a) Arranjo (3, 4, 4, 6). (b) e (c) padrões obtidos da combinação de (3, 4, 4, 6) com (3, 4, 6, 4)



**a**



**b**

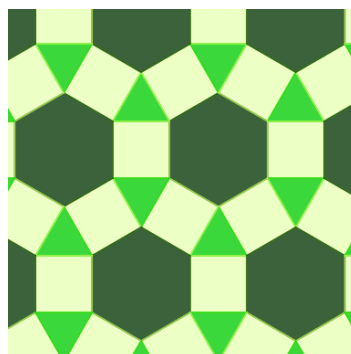


**c**

**Fonte:** Autoria própria.

Sozinho o arranjo (3, 4, 6, 4) pavimenta o plano, e essa pavimentação é 1-uniforme.

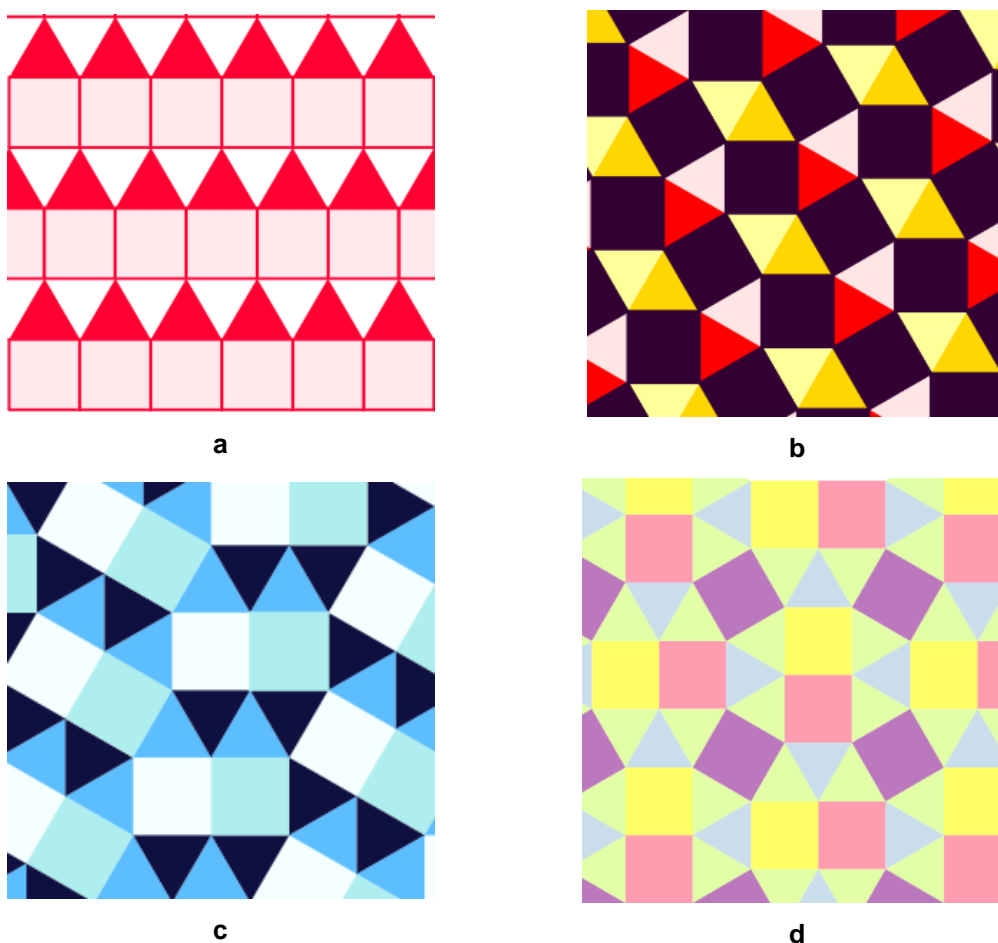
**Figura 31** – Pavimentação do plano com o arranjo (3, 4, 6, 4)



**Fonte:** Autoria própria.

Por fim, da configuração número 8 temos que as possibilidades de arranjos geram os mesmo padrões que  $(3, 3, 3, 4, 4)$  ou  $(3, 3, 4, 3, 4)$ . Tais arranjos pavimentam o plano tanto sozinhos, formando pavimentações 1-uniforme (figuras 31a e 31b), quanto quando combinados entre si, formando pavimentações 2-uniforme (figuras 31c e 31d).

**Figura 32** – (a)  $(3, 3, 3, 4, 4)$ . (b)  $(3, 3, 4, 3, 4)$ . (c) e (d) Padrões obtidos da combinação de  $(3, 3, 3, 4, 4)$  com  $(3, 3, 4, 3, 4)$



**Fonte:** Autoria própria.

Das configurações estudadas nessa seção vimos que 8 delas, sozinhas, pavimentam o plano. Da seção 2.2 temos que outras 3 também o fazem. Logo, concluímos que existem 11 pavimentações do tipo 1-uniforme.

Embora tenhamos estudado apenas alguns exemplos de pavimentação do plano com combinações de dois arranjos, em Grömbaum e Shephard (1987) podemos ver que existem 20 pavimentações do tipo 2-uniforme.

## CAPÍTULO 3. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

Chama-se **transformação rígida** (ou **isometria**) qualquer mapeamento do plano  $\mathbb{R}^2$  sobre si mesmo que preserva todas as distâncias entre pontos.

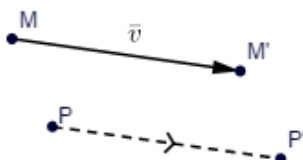
Translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante são, assim como a combinação delas, são transformações que nos permitem pavimentar o plano. É isso que vamos estudar neste capítulo.

### 3.1. Entendendo alguns conceitos

Essa seção foi baseada em Yaglom (1962, p. 15-48).

Seja  $P$  um ponto qualquer e  $\vec{v}$  um vetor fixo de comprimento  $MM'$  (módulo de  $\vec{v}$ ), ambos no plano. Seja o ponto  $P'$  tal que o segmento  $PP'$  tem comprimento  $\|\vec{v}\|$  e direção  $\vec{v}$  (figura 32). Dizemos que o ponto  $P'$  é obtido do ponto  $P$  por uma **translação** na direção e sentido de  $\vec{v}$  através de uma distância equivalente a  $\|\vec{v}\|$ .

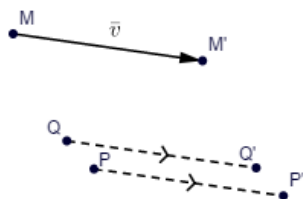
**Figura 33** – Translação de um ponto  $P$  por um vetor fixo  $\vec{v}$



**Fonte:** Autoria própria.

Uma translação não tem pontos fixos, isto é, ao levar um ponto  $P$  a um ponto  $P'$  nenhum ponto é deixado no lugar de  $P$ . Entretanto, se o vetor é  $\vec{0}$ , este deixa cada ponto em seu lugar. Essa transformação é chamada *identidade*.

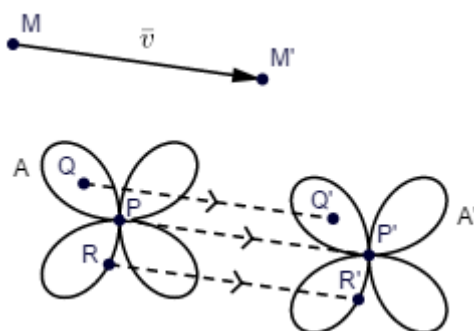
**Figura 34** – Translação dos pontos  $P$  e  $Q$  por um vetor fixo  $\vec{v}$



**Fonte:** Autoria própria.

Dizemos que uma figura  $A'$  é obtida de uma figura  $A$  por uma translação se todos os pontos da figura  $A$  são levados a pontos que estão a uma distância igual a  $\|\vec{v}\|$  deles, na direção de  $\vec{v}$ , formando assim a figura  $A'$ . Ou seja, todos os segmentos de linha que unem pontos correspondentes nas figuras  $A$  e  $A'$  são paralelos, têm a mesma direção e sentido e o mesmo comprimento.

**Figura 35** – Translação uma figura  $A$  por um vetor fixo  $\vec{v}$

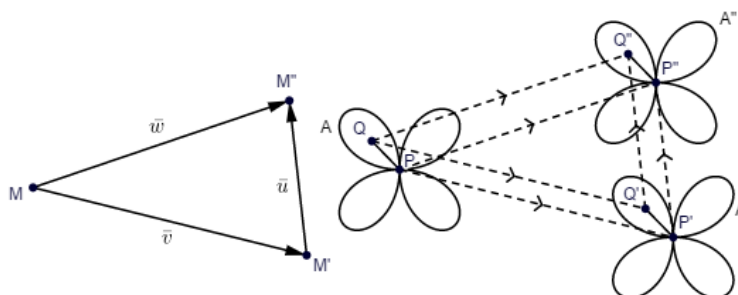


**Fonte:** Autoria própria.

De igual modo, também podemos obter a figura  $A$  de  $A'$ , ou os pontos  $P$  e  $Q$  de  $P'$  e  $Q'$ , respectivamente, através de uma translação na direção de  $M'M$ , isto é, no sentido  $-\vec{v}$ .

Suponha agora que uma translação leve o segmento  $PQ$  de  $A$  ao segmento  $P'Q'$  em  $A'$ . Temos que esses segmentos são paralelos, seu comprimento é o mesmo e eles têm a mesma direção. Seja  $A''$  uma outra figura, gerada pela translação que leva o segmento  $P'Q'$  ao seu correspondente em  $A''$ , ou seja, ao segmento  $P''Q''$ , tal que esses também são paralelos, iguais e têm a mesma direção. Observe:

**Figura 36** – Composição de translação

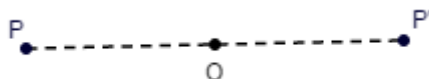


**Fonte:** Autoria própria.

Existe uma translação que leva  $A$  em  $A''$ , uma vez que os segmentos  $PQ$  e  $P''Q''$  dessas figuras são correspondentes, têm a mesma direção, são iguais em comprimento e paralelos. Então, qualquer sequência de duas translações pode ser substituída por uma única translação (figura 35). Em outras palavras, a composição de duas translações é uma translação.

Sejam os pontos  $P$  e  $P'$ . Se  $O$  é o ponto médio do segmento  $PP'$ , dizemos que  $P'$  é obtido do ponto  $P$  por uma **meia-volta** ( $180^\circ$ ) sobre ponto  $O$  (chamado o *centro de simetria*). O inverso também vale, ou seja, através de uma meia-volta de  $P'$  sobre o ponto  $O$  obtemos  $P$ .

**Figura 37** – Ponto obtido por uma meia-volta em relação ao centro de simetria

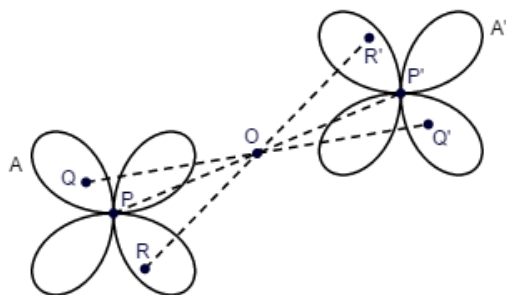


**Fonte:** Autoria própria.

Dizer que  $P'$  é simétrico a  $P$  com respeito ao ponto  $O$  ou que o ponto  $P'$  é obtido de  $P$  por uma reflexão no ponto  $O$  são outras maneiras de se referir a essa transformação.

Considere  $A$  uma figura. Outra figura  $A'$  é formada a partir de uma meia-volta do conjunto de todos os pontos de  $A$  sobre um ponto  $O$ . De igual modo, uma figura  $A$  é formada a partir da meia-volta do conjunto de todos os pontos de  $A'$  sobre um ponto  $O$ .

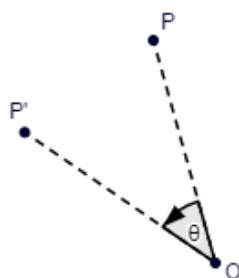
**Figura 38** – Figura obtida por uma meia-volta em relação ao centro de simetria



**Fonte:** Autoria própria.

Dizemos que um ponto  $P'$  no plano é obtido do ponto  $P$  por uma **rotação** com centro  $O$  e ângulo de rotação  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ , quando dados os pontos  $O$  e  $P$  e um ângulo  $\theta$  na direção horária ou anti-horária,  $P'$  é o ponto tal que quando  $OP$  é girado através de  $\theta$ ,  $OP$  coincide com  $OP'$ .

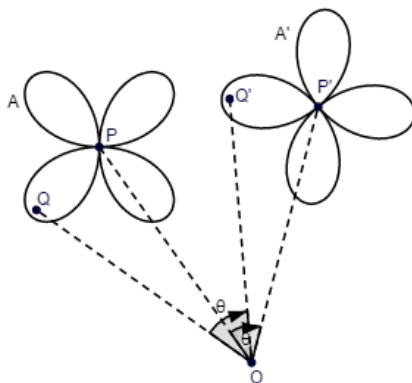
**Figura 39** – Rotação do ponto  $P$  em torno de  $O$  através do ângulo  $\theta$



**Fonte:** Autoria própria.

Da mesma maneira, obtemos a figura  $A'$  da figura  $A$  por uma rotação de todos os pontos de  $A$  em torno de um ponto  $O$  através de um ângulo  $\theta$ .

**Figura 40** – Rotação de uma figura  $A$  em torno de  $O$  através do ângulo  $\theta$



**Fonte:** Autoria própria.

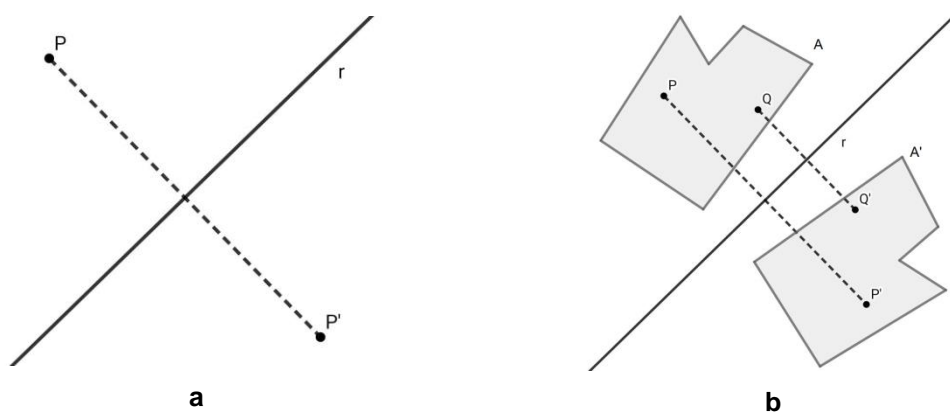
Inversamente, a figura  $A$  pode ser obtida de  $A'$  por uma rotação em torno do mesmo centro  $O$  e ângulo  $\theta$ , porém na direção oposta, ou seja, com ângulo de rotação  $360^\circ - \theta$ .

Sejam os pontos  $P$  e  $P'$  e uma reta  $r$  no plano. Se o segmento  $PP'$  é dividido ao meio por  $r$  e, mais que isso, se  $r$  é perpendicular a esse segmento, então dizemos que o ponto  $P'$  é a imagem do ponto  $P$  por uma **reflexão** na reta

$r$  (chamada *eixo de simetria*) (figura 40a). Portanto, dizemos que  $P'$  é simétrico a  $P$  com respeito a uma reta  $r$  se  $P'$  é imagem de  $P$ . Se isso acontece, então inversamente  $P$  é imagem de  $P'$  em  $r$ . Do mesmo modo podemos dizer que pares de pontos são imagens uns dos outros em uma dada reta.

Uma figura  $A'$  é imagem de uma figura  $A$  por reflexão em  $r$  quando todos os pontos da figura  $A'$  são imagens de todos os pontos da figura  $A$  por uma reflexão em  $r$ . O inverso também vale (figura 40b).

**Figura 41** – Reflexão (a) de um ponto e (b) de uma figura sobre uma reta

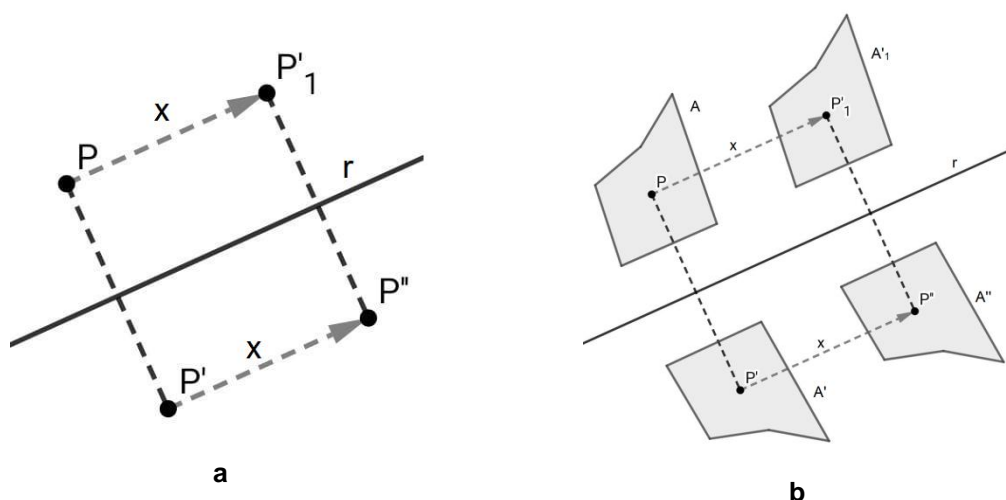


**Fonte:** Autoria própria.

Seja um ponto  $P$ . Como já visto, podemos obter sua imagem  $P'$  por uma reflexão na reta  $r$ . Fazendo a translação de  $P'$  por uma distância  $x$  na direção de  $r$ , obtemos  $P''$ . Logo, dizemos que  $P''$  é obtido do ponto  $P$  por uma **reflexão deslizante**, isto é, pela combinação de uma reflexão em uma reta  $r$  com uma translação através de uma distância  $x$  paralela a  $r$  (figura 41a). Também podemos obter a reflexão deslizante pela combinação feita na ordem translação de  $P$  através distância  $x$  na direção de  $r$  obtendo  $P'_1$  e reflexão de  $P'_1$  na reta  $r$  obtendo sua imagem  $P''$ .

De igual forma, podemos obter uma figura  $A''$  de uma figura  $A$  por uma reflexão deslizante (figura 41b).

**Figura 42** – (a) Reflexão deslizante de um ponto. (b) Reflexão deslizante de uma figura



**Fonte:** Autoria própria.

Inversamente, o ponto  $P$  pode ser obtido do ponto  $P''$  bem como a figura  $A$  pode ser obtida de  $A''$  por uma reflexão deslizante com o mesmo eixo de simetria  $r$ , porém com direção de translação oposta.

### 3.2. Simetrias

A presente seção e suas subseções foram baseadas em Beyer (1998, p. 64-199).

Quando uma figura é repetida formando um padrão, temos uma *simetria*. Essa simetria pode ser *unidimensional* (também chamada de simetria linear, de borda ou de friso), se a figura é repetida em apenas uma direção, sendo movimentada na vertical, horizontal, ou diagonal; ou *bidimensional* (simetria de papel de parede), se a figura é repetida em ambas as direções, cobrindo uma superfície.

Seguem alguns exemplos:

**Figura 43** – (a) Friso de arquitetura islâmica. (b) Parede com friso em árabe. (c) Papel de parede. (d) Piso vitoriano com friso



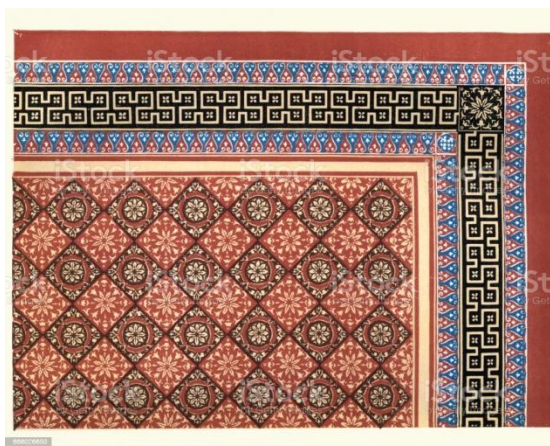
a



b



c



d

**Fonte:** (a) RGBStock. (b) Para Viagem. (c) Tenstickers. (d) iStock.

De acordo com Beyer (1998, p. 70, tradução nossa), as isometrias vistas anteriormente e suas combinações geram 7 simetrias lineares e 17 simetrias bidimensionais. Juntas elas são base para todos os padrões de decoração de superfície.

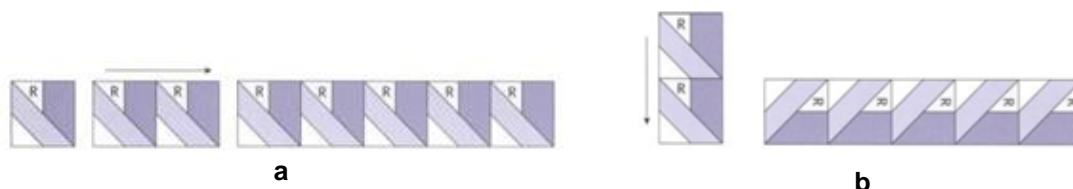
Grünbaum e Shephard (1986) e Beyer (1998) fazem estudos completos sobre essas simetrias. Nas seguintes subseções mostrarei apenas algumas das simetrias lineares e bidimensionais geradas pelas isometrias já enunciadas, deixando a critério do leitor se aprofundar nesse assunto ou não.

### 3.2.1. Criando padrões com algumas simetrias lineares

A figura sob a qual serão aplicadas as transformações a fim de obtermos simetrias e, assim, padrões é chamada figura primaria. Embora ela possa assumir outras formas, usarei um quadrado em todos que serão trabalhados, a fim de simplificar a visualização.

Começando pela translação, quando se trata de simetrias lineares essa transformação pode ocorrer na horizontal ou na vertical, formando assim dois padrões diferentes. Na figura 43, a seta indica a direção. Veja:

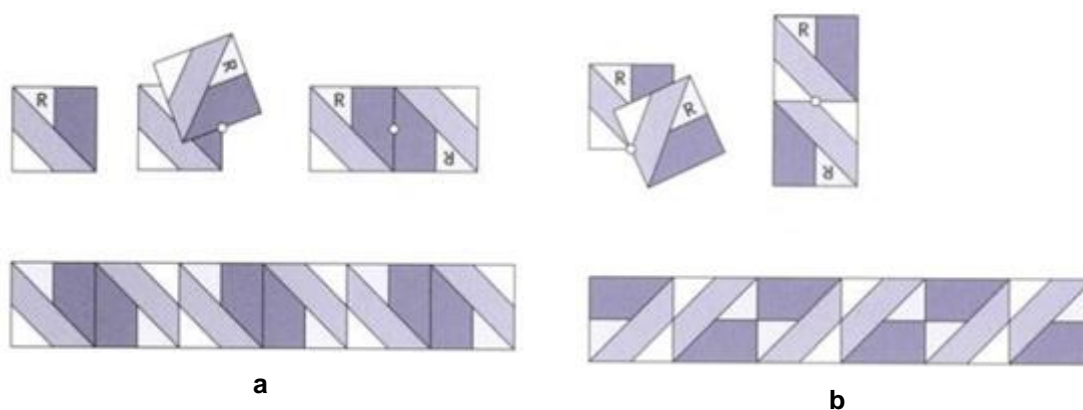
**Figura 44** – (a) Simetria linear de translação (horizontal). (b) Simetria linear de translação (vertical).



**Fonte:** Adaptação de Beyer (1998, p.182). Carlos e Breda (2017, p.87).

Através da simetria linear de meia-volta também encontramos dois diferentes padrões: um quando o centro de simetria, através do qual a figura será girada, está em uma das laterais, e o outro quando o centro está no topo ou na base.

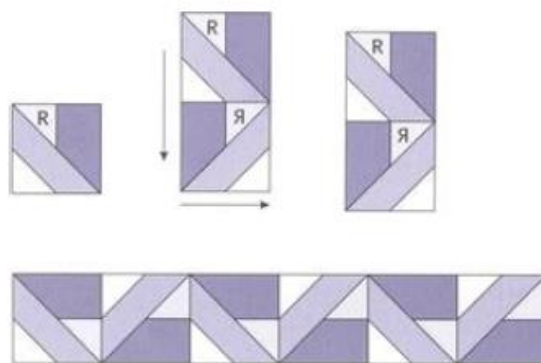
**Figura 45** – (a) Simetria linear de meia-volta: lado girado. (b) Simetria linear de meia-volta: fundo girado



**Fonte:** Adaptação de Beyer (1998, p.185).

No caso da reflexão deslizante pode-se encontrar até 4 padrões dependendo da ordem em que as transformações forem executadas (a figura primária pode ser deslizada na vertical, na horizontal ou na diagonal). Segue um deles:

**Figura 46** – Simetria linear de deslizamento vertical com reflexão horizontal



**Fonte:** Adaptação de Beyer (1998, p.187).

Seguem alguns exemplos de arte onde foram usadas simetrias lineares para a obtenção de padrões:

**Figura 47** – (a) Friso com simetrias de translação e meia-volta. (b) Friso com simetrias de translação, reflexão deslizante e meia-volta. (c) Friso com simetrias de translação e reflexão vertical. (d) Friso com simetrias de translação e reflexão horizontal



**a**



**b**



**c**



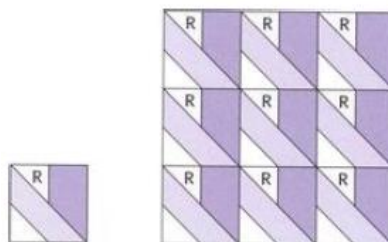
**d**

**Fonte:** Mathematical Association of America.

### 3.2.2. Criando padrões com simetrias bidimensionais

Na translação a figura primitiva é repetida continuamente pelos lados, para cima e para baixo, preservando a mesma direção.

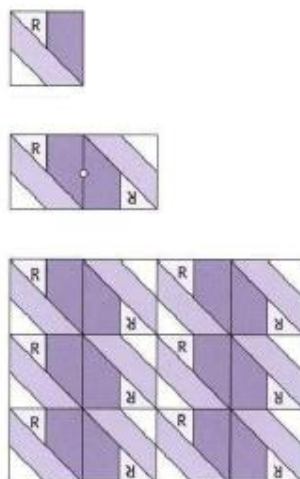
**Figura 48** – Simetria bidimensional de translação



**Fonte:** Adaptação de Beyer (1998, p.83).

Para criar um padrão de simetria por meia-volta é preciso ter duas figuras primárias<sup>2</sup>, ou seja, é preciso ter uma telha (figura obtida da primária quando esta passa por uma transformação). Pode-se encontrar várias simetrias por rotação em meia-volta – depende do centro de simetria (ponto ao redor do qual a rotação ocorrerá) tanto para obter a telha quanto para obter o padrão. Vale lembrar também que esse ponto deve ser preservado. Segue um exemplo:

**Figura 49** – Telha e padrão gerados da simetria por meia-volta em relação a um ponto na lateral



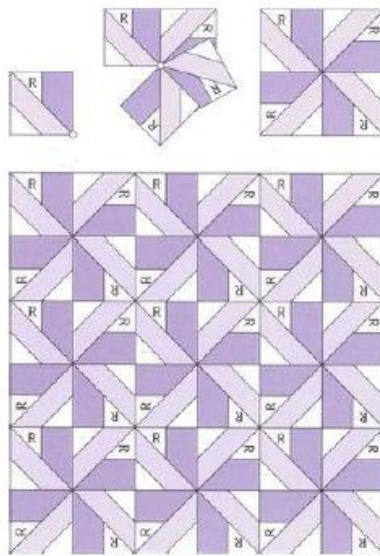
**Fonte:** Adaptação de Beyer (1998, p.86).

Por rotação também podemos obter vários padrões dependendo do ponto ao qual a figura primária e as telhas serão rotacionadas. Veja o exemplo da figura 49.

---

<sup>2</sup> BEYER, J. **Designing tessellations: the secrets of interlocking patterns**, Illinois: NTC/Contemporary Publishing Group, Inc

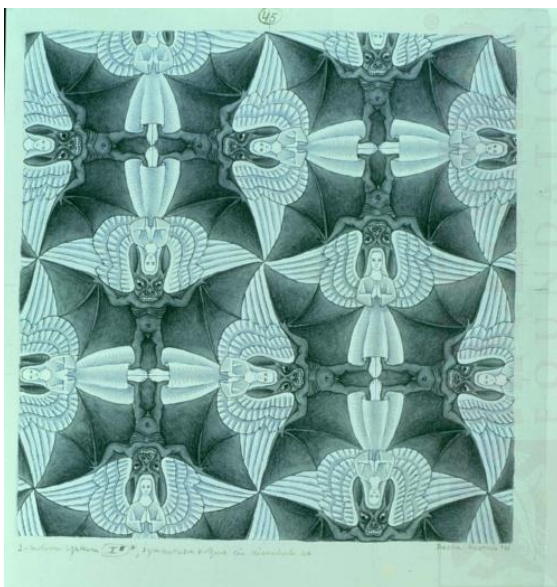
**Figura 50** – Padrão obtido da simetria por rotação em torno do canto inferior esquerdo



**Fonte:** Adaptação de Beyer (1998, p.93).

Ricos exemplos sobre a pavimentação do plano usando simetria são as obras de M.C. Escher – artista que deixou e ainda deixa muita gente maravilhada com seu trabalho.

**Figura 51** – (a) Anjos e demônios: reflexão. (b) Horseman: reflexão deslizante.



**a**



**b**

**Fonte:** M.C. Escher.

## CAPÍTULO 4. ESCHER NA SALA DE AULA

Neste capítulo vamos falar um pouco sobre a vida e obras do magnífico artista M.C. Escher.

### 4.1. Biografia

Essa seção foi baseada em M.C. Escher Company B.V. (2020) e ESCHER: Het Oneindige Zoeken (2019).

Maurits Cornelis Escher nasceu no dia 17 de junho de 1898 na cidade de Leeuwarden, nos Países Baixos. Durante sua infância e parte da juventude viveu com sua família em Arnhem.

Após falhar nos exames finais, seu pai – que era um engenheiro rico e influente – conseguiu com que fosse aceito na Universidade Técnica de Delft, mas Escher não ficou por muito tempo. No ano seguinte ele começou a estudar arquitetura na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas de Haarlem.

Em apenas três dias de aulas seu professor de artes gráficas Samuel Jesserun de Mesquita viu potencial em suas linoleogravuras e o incentivou a seguir nas artes gráficas.

Após terminar a faculdade, Escher fez várias e longas viagens para a Itália. Quando esteve em Ravello, em 1923, conheceu Jetta Umiker, por quem se apaixonou e com quem se casou um ano depois. Em 1925 eles se mudaram para Roma. Viveram ali por cerca de 10 anos e tiveram dois filhos, George e Arthur. De acordo com The M.C. Escher Company B.V. (2020) durante os anos em que vive em Roma ele viaja todo ano pela Itália, onde faz desenhos e esboços que depois usa em seu estúdio para suas litografias e xilogravuras.

Com a ascensão do fascismo Escher e sua família foram para a Suíça. Em 1937 se mudaram para Bruxelas, na Bélgica, e lá tiveram seu terceiro filho, Jan, um ano depois. Nessa época Hitler surgiu na Alemanha e, apesar de ter sido um período bem agitado Escher, que estava impossibilitado de viajar, passou muito tempo em seu ateliê e criou suas obras mais famosas. Ele não teve tempo para trabalhar durante a Segunda Guerra, pois teve que proteger a

família e encontrar comida. Quando esta acabou, Escher retomou os trabalhos e, com o passar do tempo foi ganhando visibilidade, em particular na Holanda.

O artigo sobre sua arte publicado pela revista “Life” alavancou sua fama – suas obras passaram a ser mundialmente admiradas. Foi convidado a expor no Congresso Internacional de Matemática, que ocorreu em Amsterdã, em 1954, e daí em diante passou não só a proferir conferências e participar de exposições em centros de estudo, museus e salões de arte, como também em centros de ciências e matemática em diversos países (BARBOSA, 1993, p.113).

Em 1962 descobriu que estava com câncer de cólon e, após algum tempo sem trabalhar devido às cirurgias que foi submetido, já não se sentia bem para criar novas obras, passando então a reimprimir antigas gravuras. M.C. Escher faleceu no dia 27 de março de 1972, em Hilversum. Até essa data suas obras já tinham sido expostas nos principais museus e galerias da Europa e da América do Norte, sendo reconhecidas pela notável combinação de sensibilidade, precisão técnica e conhecimento matemático que expressavam (IMENES, 1987, p.36).

#### 4.2. Obras

Essa seção e sua subseção foram baseadas em Escher (2007, p. 5-6).

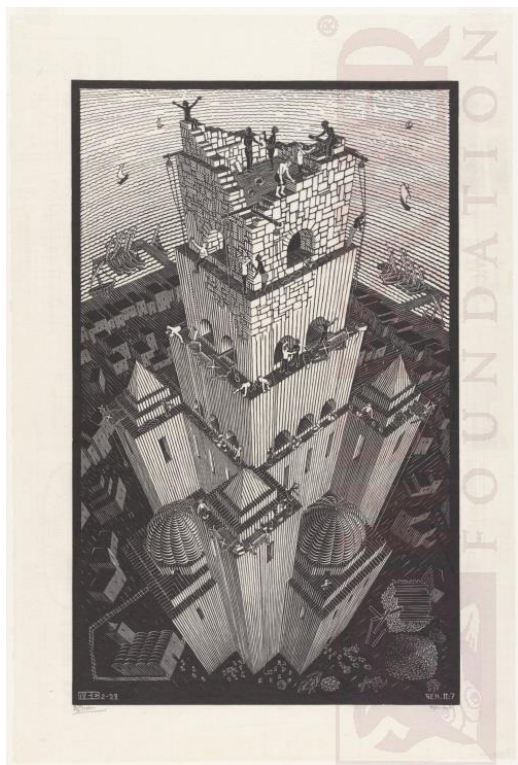
Na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas seu professor S.J. de Mesquita, além de uma inspiração, foi seu mentor em xilogravura e de quem herdou a preferência por trabalhar com tal arte e técnica. Ao sair de lá, em 1922, dedicou-se a pesquisas sobre materiais gráficos e durante sete anos trabalhou apenas com isso (xilografia). Em 1929 fez sua primeira litografia, nomeada Goriano Sicoli, Abruzzi. Até 1935 ele já havia produzido cerca de 40 litografias e 70 xilogravuras e gravuras.

Os trabalhos de M.C. Escher são marcados por duas fases, segundo Barbosa (1993):

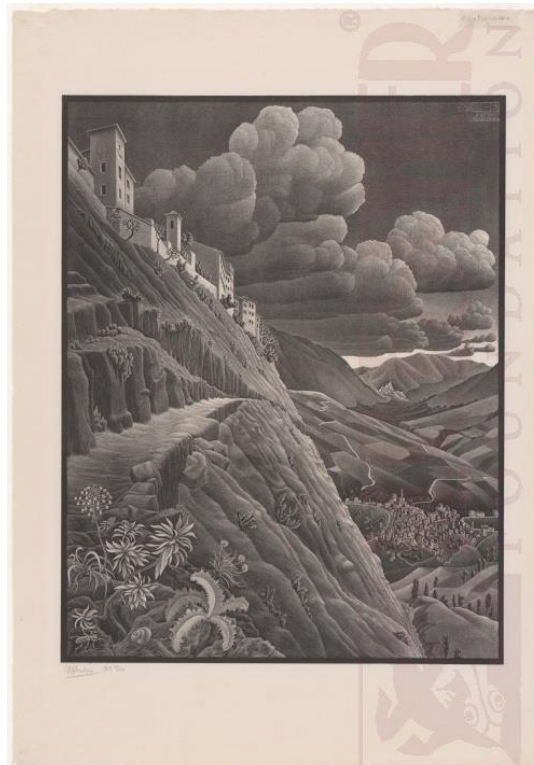
Na primeira, até 1937, eles correspondem à realidade visível de cidades e regiões italianas. Expressando detalhes, peculiaridades e irregularidades, mas também preocupação com a estrutura espacial e mostrando notável uso de perspectiva [...]

Na segunda fase, posterior a 1937, seus trabalhos mostram afastamento do mundo físico. Usando a partir de então sua própria imaginação e visão detalhista, mas buscando regularidade, produziu composições geométricas de várias geometrias. (p.109)

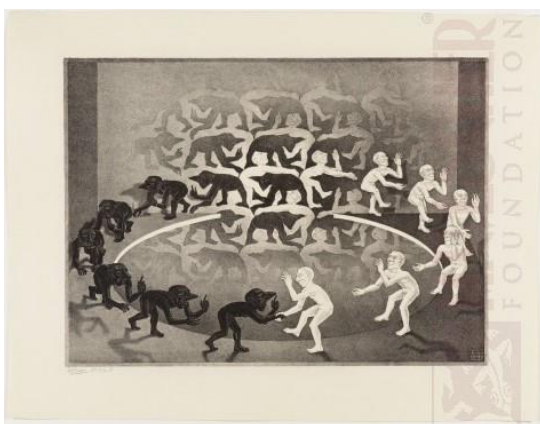
**Figura 52** – Obras da primeira fase: (a) Tower of Babel (1928) e (b) Castrovalva (1930). Obras da segunda fase: (c) The Encounter (1944) e (d) Relativity (1953)



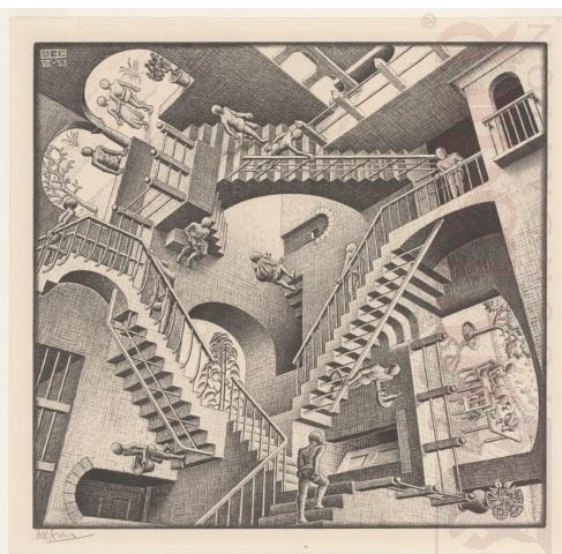
a



b



c



d

Fonte: M.C. Escher.

Em sua primeira fase ele já havia ensaiado trabalhos nesta linha, como em 1922, com seu “Eight heads” (quatro cabeças de cada sexo), ou em 1926-1927, com seus estudos de divisão regular do plano com animais imaginários (BARBOSA, 1993, p.110), mas não deu continuidade.

**Figura 53** – Eight heads, 1922



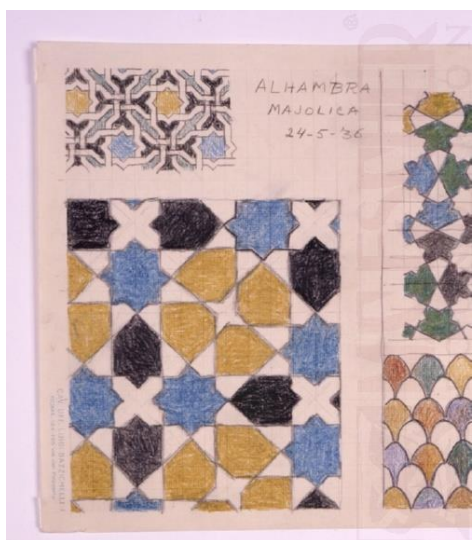
**Fonte:** M.C. Escher.

O que mudou o curso de sua carreira foram suas visitas a Espanha, onde ficou maravilhado e surpreso com os mosaicos que adornavam o chão e as paredes do palácio de Alhambra e da Mesquita de Córdoba, pois eram limitados apenas a formas geométricas. Curioso para entender como aqueles padrões foram criados, Escher preencheu seu caderno com esboços dos vários desenhos geométricos encontrados (BEYER, 1999, p.384, tradução nossa) e passou a estudá-los. Ali embarcou em uma jornada de vida, trabalhando para criar formas reconhecíveis – pássaros, animais, até mesmo pessoas – que preencheriam um plano sem lacunas ou sobreposições (BEYER, 1999, p.384, tradução nossa).

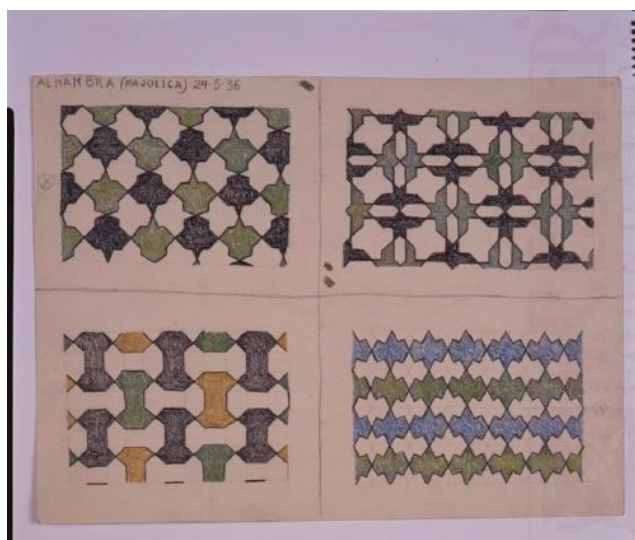
**Figura 54** – (a) Mosaico de Alhambra. (b) e (c) Esboços de mosaicos de Alhambra feitos por Escher



**a**



**b**



**c**

**Fonte:** (a) UFRGS. (b) e (c) M.C. Escher.

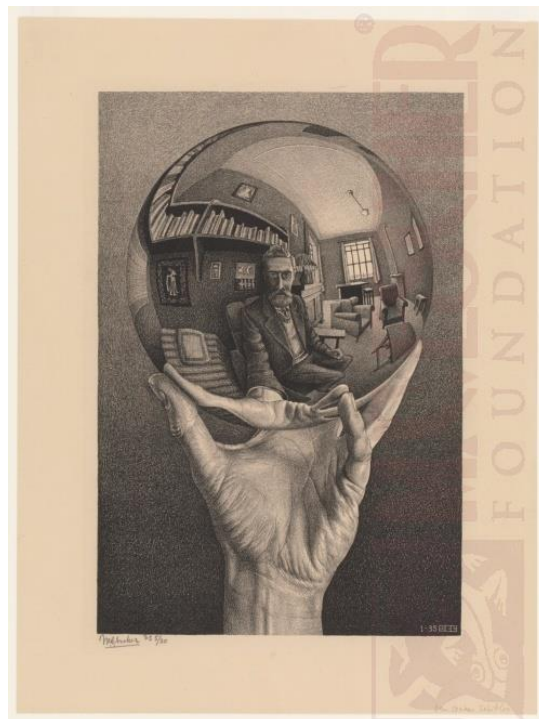
#### 4.2.1. Escher e a matemática

Nascido em uma família de ciências exatas, sempre teve um enorme respeito pelos fenômenos naturais. Escher (2007, p.6, tradução nossa) diz: “Apesar de eu ser absolutamente inocente de treinamento ou conhecimento nas ciências exatas, eu freqüentemente pareço ter mais em comum com matemáticos do que com meus colegas artistas”.

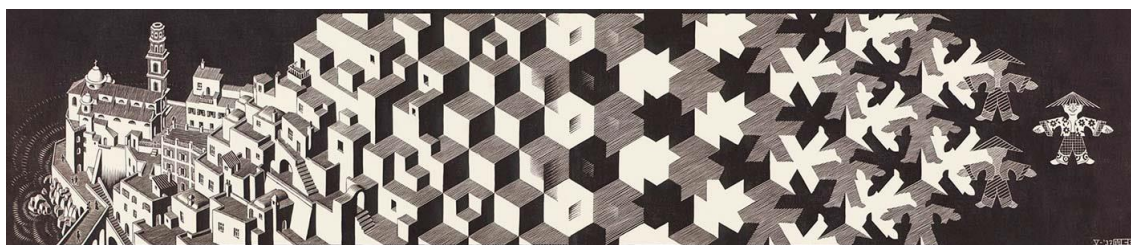
Embora nem sempre seja fácil enxergar, a ligação de sua arte com a matemática existe desde sua primeira fase. Por exemplo, nas obras Still life

with mirror (1934), Still life with reflecting sphere (1934) e Hand with reflecting sphere (1935) ele usa reflexões da esfera; e em Metamorphosis I (1937) traz o infinito ao finito com a não fragmentação do padrão.

**Figura 55** – (a) Hand with reflecting sphere. (b) Metamorphosis I



a



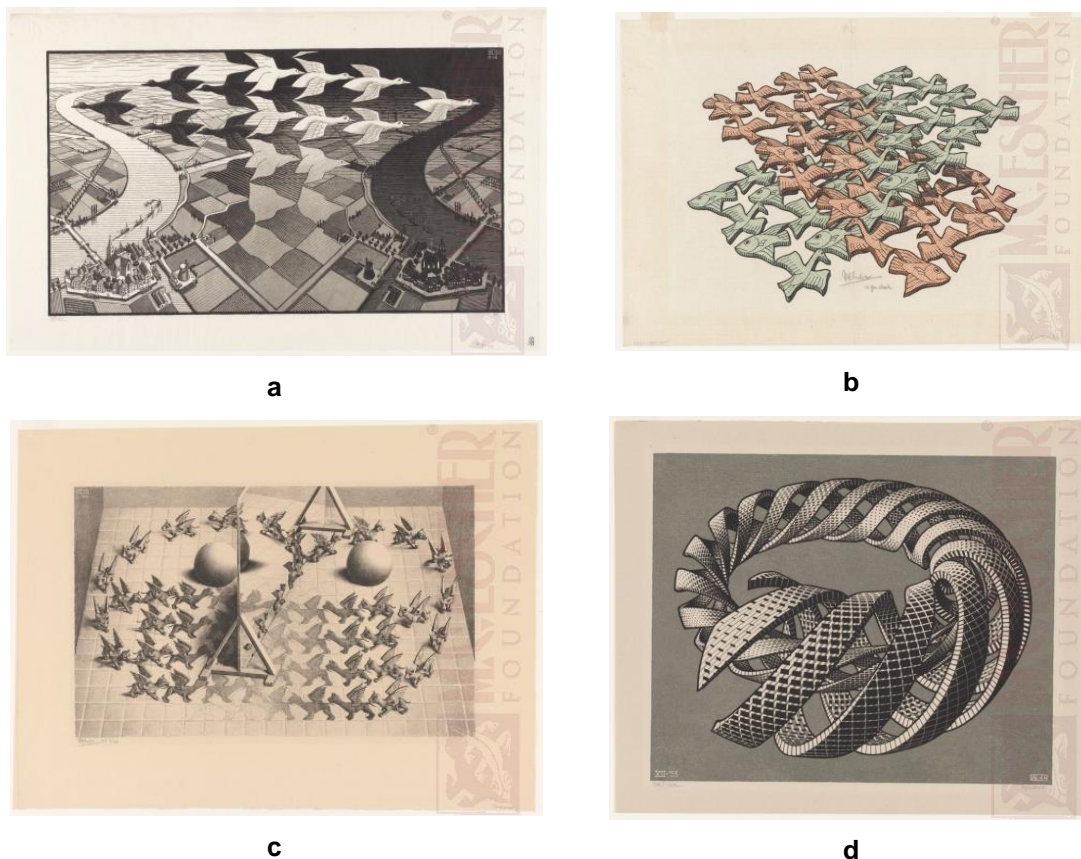
b

**Fonte:** (a) M.C. Escher. (b) The metamorphosis of Escher.

Em seus trabalhos da segunda fase são empregados, dentre outros conteúdos matemáticos: simetria, em Day and night (1938) e Sky and water I (1938); reflexão com deslizamento, em Swans (1956), Horsemen (1946) e Two intersecting planes (1952); reflexão em espelhos, em Magic mirror (1946); padrões de modelos de geometrias não euclidianas, em Circle limit I, II, III e IV (1958, 1959 e 1960, respectivamente); e preenchimento irregular de superfícies planas, em Mosaic I (1951) e II (1957); espaços ilimitados, em Depth (1955) e

Three intersecting planes (1954); anéis espaciais e espirais, em Spirals (1953) e Knots (1965); inversão, em Concave and convex (1955) e Cube with Magic ribbons (1957); poliedros, em Double planetoid (1949), Order and chaos (1950), Gravitation (1952) e Tetraedral planetoid (1954).

**Figura 56** – (a) Day and night. (b) Two intersecting planes. (c) Magic mirror. (d) Spirals



**Fonte:** M.C.Escher.

As aplicações da Matemática em sua produção não se limitaram aos mosaicos geométricos regulares (IMENES.1987, p.37). É através dessa mescla com sólidos geométricos, malhas curvas e espiraladas, perspectivas etc. que ele consegue trilhar os caminhos dessa ciência, criando obras dinâmicas, ricas, impecáveis, que são admiradas até os dias de hoje.

#### 4.3. Propostas de atividades

Como visto, os mosaicos são representações artísticas que vêm sendo utilizadas por diversos povos desde os tempos mais remotos. Uma vez que

podem ser identificadas com as pavimentações do plano, possuem importante vertente matemática que pode ser explorada em sala de aula. Portanto, seguem algumas propostas de atividades com mosaicos que poderão ser utilizadas pelo professor como motivação para o ensino da Geometria.

Sugere-se que sejam aplicadas em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental em diante.

#### 4.3.1. Atividade 1

Tem por objetivo levar os alunos a compreender os conceitos matemáticos implícitos na estrutura dos mosaicos.

Serão utilizados kits de material manipulável: folhas de papel A4 contendo contornos de regiões poligonais e conjuntos de polígonos regulares. Esses conjuntos podem ser feitos de cartolina ou papel cartão e cada um deve conter, aproximadamente, 20 triângulos, 20 quadrados, 30 hexágonos, 15 octógonos, 15 dodecágonos e 10 de cada um dos demais polígonos que não pavimentam o plano nem sozinhos nem combinados com outros (veja Capítulo 2, Seções 2.2 e 2.4, p. 22 e 26-34). O tamanho dos polígonos fica a critério do professor.

Para essa atividade, os alunos poderão trabalhar em duplas ou trios.

Após a formação dos grupos, estes receberão um kit de material manipulável e o professor deverá pedir para que preencham as regiões das folhas A4 com polígonos do mesmo tipo e também de tipos diferentes, levando em consideração que não deve haver espaços entre os polígonos, tampouco sobreposição. Os alunos devem anotar caso isso ocorra em suas tentativas.

Pode-se estipular um tempo X para que essa etapa seja executada e, ao terminarem, os grupos serão convidados a expor suas soluções para a turma, destacando as dificuldades para o desenvolvimento dessa atividade e relatando as anotações pedidas.

O professor deverá perguntá-los acerca das condições para o recobrimento das regiões com polígonos do mesmo e de diferentes tipos. Por exemplo, se é possível fazer o preenchimento só com pentágonos ou octógonos ou com hexágonos e triângulos equiláteros. Os estudantes deverão ser levados a concluir que, para que seja possível o recobrimento do plano a

soma dos ângulos internos dos polígonos em torno de um mesmo vértice deverá ser  $360^\circ$ . (veja Capítulo 2, p. 22)

A partir daí, serão introduzidos os conceitos de mosaicos, de pavimentação do plano, arestas, vértices, ângulos etc.

#### 4.3.2. Atividade 2

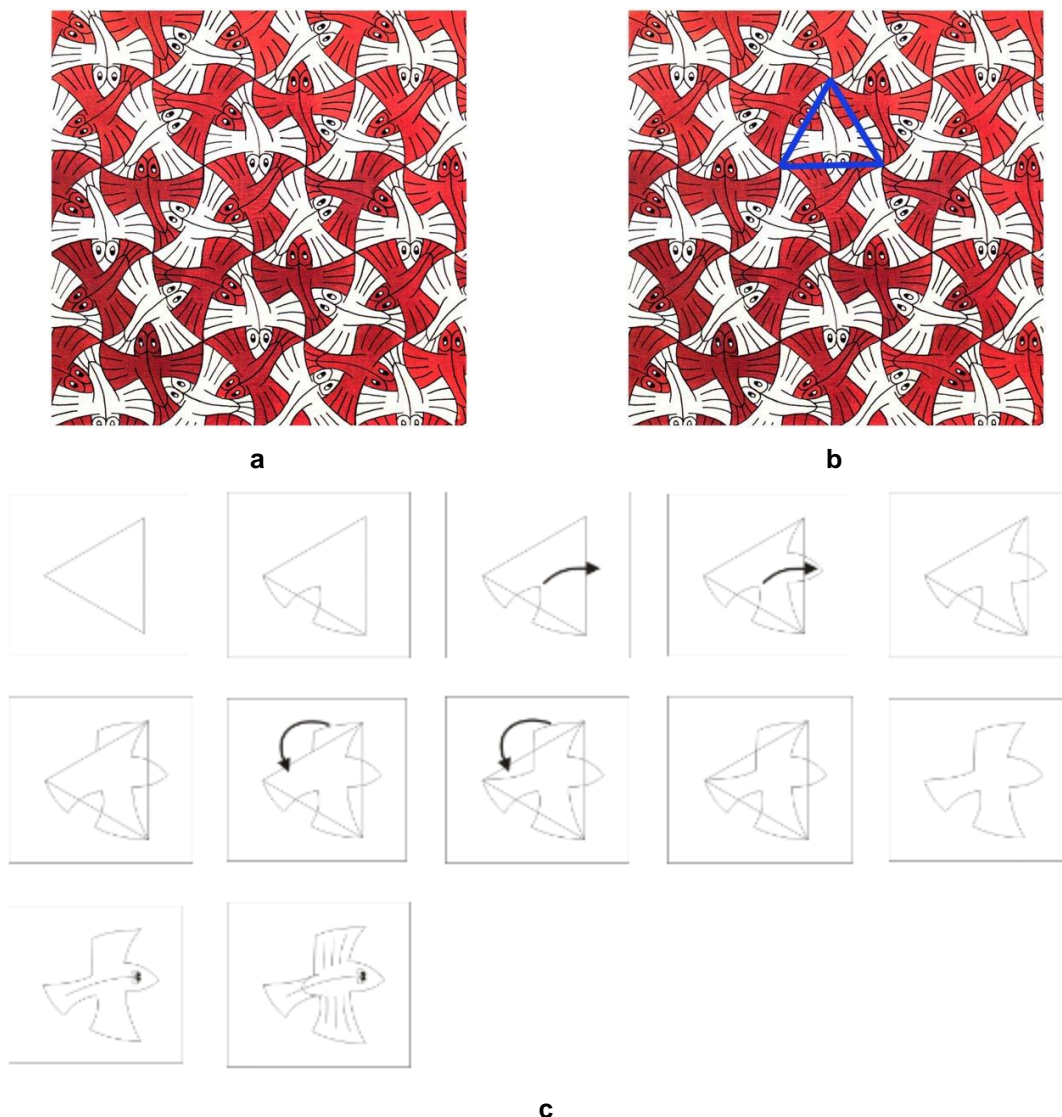
Tem por objetivos estudar sobre algumas simetrias do plano, analisar a estrutura das pavimentações tipo Escher, relacionar as isometrias do plano com as pavimentações e, utilizando os reticulados do plano composto de polígonos regulares básicos, identificar os tipos de mosaicos que podem ser construídos a partir deles.

Para sua realização, o professor escolherá um polígono regular que sozinho pavimenta o plano e, partindo de um deles, falará sobre figura primária e transformações do plano, aplicando reflexão, translação, rotação e algumas de suas combinações sobre a mesma. (veja Capítulo 3, p. 41-51)

Em seguida, exibirá algumas obras de Escher e perguntará aos alunos se eles acham que para a execução dessas artes foram utilizados conceitos matemáticos.

Após essa discussão, deverá fazer um breve histórico sobre a vida e obra desse artista e tomar um de seus trabalhos como exemplo. Mostrar a transformação do polígono (figura primária) em outra figura de mesma área e aplicar as isometrias necessárias para que se forme tal obra (figura 56). Esse passo pode ser feito com figuras impressas ou mesmo gifs animados ou vídeos.

**Figura 57** – (a) Obra Nº99 de Escher. (b) Obra Nº99 evidenciando a malha. (c) Transformação da figura primária



**Fonte:** (a) e (b) Pereira e Aquino (2010). (c) Sampaio (2012).

Por fim, distribuir para a turma uma malha impressa (triangular, quadrada ou hexagonal) e pedir para que os alunos construam seus próprios mosaicos aplicando o que foi estudado.

Além das ideias das transformações, o professor poderá, sempre usando a linguagem mais apropriada ao ano em que estiver trabalhando, explorar as noções de ângulo e polígonos e seus elementos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho situa a geometria dentro de um contexto em que arte, história e matemática caminham juntas. Os mosaicos são construídos a partir de polígonos de diversos tipos e sua construção pode servir como elemento motivador para o trabalho com conceitos geométricos importantes: polígonos, áreas, perímetros, ângulos, isometrias no plano.

O estudo das possibilidades de recobrimento do plano com polígonos regulares pode ser uma boa maneira de começar a explorar tais conceitos, como visto na Seção 4.3.1, p.59. Entretanto, há outras possibilidades de se desenvolver a proposta desse trabalho, como com o software Geogebra.

Um projeto multidisciplinar envolvendo os mosaicos também pode ser um trabalho frutífero para a formação do aluno. Professores de matemática, arte e história podem juntos realizar uma oficina onde os alunos aprenderão sobre a relação dos mosaicos com essas três áreas do conhecimento, fazendo com que eles não só adquiram conhecimento sobre cada uma delas, mas também percebam que as mais variadas ciências caminham lado a lado.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrendo Padrões em Mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.

BEYER, J. **Designing tessellations : the secrets of interlocking patterns**. Illinois: Contemporary Book, 1998.

DOLCE, O., POMPEO, N. **Fundamentos da Matemática Elementar**, v.9, São Paulo: Atual Editora, 2005.

ESCHER: **Het Oneindige Zoeken**. Produção: Robin Lutz. Alemanha, 2019.

ESCHER, M. C. **M. C. Escher – The Graphic Work**. Köln: TASCHEN GmbH, 2007.

GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C. **Tillings and Patterns**. New York: W. H. Freeman and Company, 1987.

IMENES, L. M. **Geometria dos mosaicos**. São Paulo: Scipione, 1987.

LOURENÇO, M. T. C. **O ensino de geometria através da pavimentação do plano**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto, 2014.

MUCCI, A. **A arte do mosaico**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1962.

SANDER, L. **Encyclopedia of Mosaic Art**. Delhi: The English Press, 2012.

SILVA, E. A.; LOURENÇO, M. L.; MARTINS, L. C. J. Uma introdução à pavimentação arquimediana do plano, **Boletim de Educação Matemática**, ano 9, n. 10, 1994.

THE M.C. ESCHER COMPANY B.V. **M.C. Escher**, 2020. Disponível em: [www.mcescher.com/](http://www.mcescher.com/). Acesso em: 18 nov. 2020.

THE M.C. ESCHER COMPANY. **Escher in Het Paleis**, 2020. Masterpieces. Disponível em: <https://www.escherinhetpaleis.nl/about-escher/masterpieces/>. Acesso em: 18 nov. 2020.

YAGLOM, I. M. **Geometric Transformations I**. Mathematical Association of America, 1962

DOMINGUES, J. E. **Ensinar História**, 2015. Disponível em: <https://ensinarhistoriajoelza.com.br/estandarte-de-ur/>. Acesso em: 15 de ago. de 2020.

BEPRESS. **Furman University Scholar Exchange**. Disponível em: <https://scholarexchange.furman.edu/about.html>. Acesso em: 15 de ago. de 2020.

ANDRADE, C. **Blog do Claudemir Andrade**. Disponível em: <http://blogdoclaudemirandrade.blogspot.com/2010/05/o-largo-sao-sebastiao-e-o-calcadao-de.html>. Acesso em: 13 de nov. de 2020.

ARTEREF. **Arteref**, 2020. Disponível em: <https://arteref.com/movimentos/helenismo-alexandre-o-grande-e-a-influencia-artistica-grega/>. Acesso em: 02 de nov. de 2020.

**An Archeological World**. Disponível em: <http://archaeologicalworld.blogspot.com/2012/07/nile-mosaic-of-palestrina.html>. Acesso em: 02 de nov. de 2020.

**My Favourite Planet**, 2003. Disponível em: <http://www.my-favourite-planet.de/english/people/d1/dioskourides-samos.html>. Acesso em: 17 de ago. 2020.

**Ancient World Magazine**, 2020. Disponível em: <https://www.ancientworldmagazine.com/articles/roman-girls-bikinis-mosaic-villa-romana-del-casale-sicily/>. Acesso em: 15 de ago. de 2020.

**A travel guide to Sicily**. Disponível em: <https://sicilyonmymind.com/2017/08/18/piazza-armerina-and-the-villa-romana-del-casale/>. Acesso em: 16 de ago. de 2020.

Generalitat de Catalunya. **Visit Museum: The museums of Catalonia in your hands**. Disponível em: <https://visitmuseum.gencat.cat/es/museu-d-arqueologia-de-catalunya-empuries/objeto/mosaic-del-sacrifici-d-ifigenia>. Acesso em: 16 de ago. de 2020.

Pontifício Instituto das Missões Exteriores. **Mundo e Missão**, 2018. Disponível em: <https://editoramundoemissao.com.br/conheca-a-capela-palatina-uma-arca-de-luz-na-sicilia/>. Acesso em: 11 de nov. de 2020.

O GLOBO. **Os prédios que nasceram com a Avenida Rio Branco**, 2012. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/rio/os-predios-que-nasceram-com-avenida-rio-branco-6012759>. Acesso em: 14 de nov. de 2020.

FNFF. **Santiago Padrós Elías, autor de la Cúpula de la Basílica Del Valle de los Caídos**, 2019. Disponível em: <https://fnff.es/historia/427790096/santiago-padros-elias-autor-de-la-cupula-de-la-basilica-del-valle-de-los-caidos.html>. Acesso em: 20 de out. de 2020.

Mosaicos do Brasil. **A tridimensionalidade em Marcelo de Melo e as opções do mosaico de revestimento**. Disponível em: <http://mosaicodobrasil.tripod.com/id139.html>. Acesso em: 28 de out. de 2020.

KING, S. **Sonia King Mosaic Artist**, 2017. Disponível em: <http://mosaicworks.com/gallery/fineart/spinoff/>. Acesso em: 28 de out. de 2020.

UFRGS. **Alhambra**. Disponível em: [http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias\\_digitaes\\_l/2009/modulo\\_l/complemento13.html](http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitaes_l/2009/modulo_l/complemento13.html). Acesso em: 28 de out. de 2020.

RGBSTOCK. **Friso de arquitetura islâmica**. Disponível em: <https://www.rgbstock.com.br/photo/mU9ZcqC/Friso+de+arquitetura+isl%C3%A2mica>. Acesso em: 01 de nov. de 2020.

Para Viagem. **Paredes com friso em árabe entre azulejos e arabescos**, 2017. Disponível em: <https://www.paraviagem.com.br/roteiro-de-visita-alhambra-como-se-programar-o-que-ver-por-la/roteiro-de-visita-a-alhambra-dicas-para-se-programar-e-o-que-ver-por-la-030/>. Acesso em: 22 de nov. de 2020.

MAA.**Frieze Patterns.** Disponível em:  
[https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload\\_library/4/vol1/architecture/Math/seven.html](https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/4/vol1/architecture/Math/seven.html). Acesso em: 23 de nov. de 2020.

SAMPAIO, P. **A Matemática através da Arte de M.C. Escher.** Millenium, 42, p. 53. Disponível em: <https://docplayer.com.br/6541720-A-matematica-atraves-da-arte-de-m-c-escher.html>. Acesso em: 30 de nov. de 2020.

PEREIRA, P.C.. AQUINO, R.M. **Mosaicos : A Matemática na Arte ou a Arte na Matemática? Minicurso.** 2010.