UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PATRICYA BENDIA INÁCIO DA SILVA

A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU: BREVE RESGATE HISTÓRICO E PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA

SEROPÉDICA
2020

PATRICYA BENDIA INÁCIO DA SILVA

A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU: BREVE RESGATE HISTÓRICO E PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA

Monografia Apresentada à Banca Examinadora da UFRRJ, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática na modalidade de Licenciatura sob a orientação do professor Renato Machado Aquino.

SEROPÉDICA
2020

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ATA Nº 3802 / 2020 - DeptM (12.28.01.00.00.00.63)

Nº do Protocolo: 23083.066824/2020-27

Seropédica-RJ, 09 de dezembro de 2020.

A monografia "A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU: BREVE RESGATE HISTÓRICO E PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA", apresentada e defendida por PATRICYA BENDIA INACIO DA SILVA matrícula 201619526-4 foi aprovada pela Banca Examinadora, com conceito "S" recebendo o número 743.

Seropédica, 07 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA: Prof. Dr. Renato Machado Aquino (**Orientador**), Prof. Dr. Carlos Andres Reyna Vera Tudela e Prof. Dr. Pedro Carlos Pereira.

(Assinado digitalmente em 09/12/2020 22:37)
CARLOS ANDRES REYNA VERA TUDELA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: 2433643

(Assinado digitalmente em 14/12/2020 10:37)
PEDRO CARLOS PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: 6377694

(Assinado digitalmente em 11/12/2020 22:28)
RENATO MACHADO AQUINO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: 418840

“Se os estudos aos quais uma pessoa se aplica tendem a enfraquecer suas afeições e a destruir seu gosto pelos prazeres simples que não admitem mistura alguma, então esses estudos certamente são ilegítimos; isto é, não condizem com a mente humana”.

— Mary Shelley

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, à minha mãe. Pelas manhãs, sentada comigo à mesa da cozinha, em meus primeiros anos escolares, ajudando-me a fazer os trabalhos de casa. Por não me repreender quando eu aprendia letras e palavras novas e as escrevia nas paredes da casa. Pelos longos momentos ajudando-me a estudar para provas e por me ensinar a entender e não memorizar. Por fazer o possível e impossível para garantir que eu tivesse a melhor educação. Por me incentivar a ter gosto pela leitura. Por acreditar em mim em momentos que eu nem mesma acreditava. Pelas aprendizagens da vida. Pela paciência — embora nem sempre —, carinho, apoio, incentivo, amor e compreensão.

Ao Guilherme Joanes, pela paciência, ajuda, incentivo, carinho, por ouvir minhas longas reclamações e pela crença inabalável na minha capacidade de fazer qualquer coisa.

A todos os meus professores da educação básica, que tão fortemente contribuíram para que eu conseguisse chegar ao ensino superior.

Agradeço aos professores da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, com os quais tanto aprendi. Em especial, ao meu Professor e Orientador Renato Aquino, pela paciência, apoio, ajuda, contribuições, pelos materiais emprestados e toda aprendizagem ao longo desses anos, durante o Programa de Residência Pedagógica e a escrita deste trabalho; e à Professora Eulina Coutinho, pelo exemplo de democracia em sala de aula e preocupação com o bem estar dos alunos.

À Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, por proporcionar essa experiência e me encantar com sua beleza.

E, por fim, agradeço a mim, por não ter desistido e ter dado o meu melhor ao longo dessa jornada, mesmo em momentos em que a exaustão e o desânimo pareciam prestes a me vencer.

RESUMO

O presente trabalho visa a apresentação de um conjunto de atividades para o ensino das equações do segundo grau integrando diferentes campos da matemática: a aritmética, a geometria e a álgebra. A metodologia um levantamento bibliográfico que auxiliasse na formulação da sequência didática proposta e a fundamentasse. Nesta pesquisa, dividida em três capítulos, discutiremos a importância de cada um dos campos abordados, bem como da proposta de integração. Além disso, faremos algumas considerações sobre o ensino das equações do segundo grau e uma análise de alguns momentos que compõem a evolução histórica das mesmas. Ao final, apresentaremos e discutiremos a proposta de atividades propriamente dita.

Palavras-Chave: Equações do segundo grau; Integrando aritmética, geometria e álgebra; Sequência didática.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IMUK	Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission
MD	Material Didático
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os conteúdos matemáticos e o desenvolvimento dos pensamentos referentes aos seus diversos campos compõem um dos momentos mais essenciais da educação escolar. Contudo, apesar de sua importância, a matemática é uma das disciplinas menos queridas entre os alunos, o que muitas vezes denota pouca compreensão dos mesmos.

A impopularidade da matemática resulta de diversos fatores, dentre eles: a forma como os conteúdos são trabalhados em sala de aula; o fato de os alunos não enxergarem aplicabilidade para grande parte dos conteúdos e, por isso, não entenderem o porquê de estudá-los. Mais ainda, pode-se destacar as dificuldades com as quais se deparam durante o processo de aprendizagem.

A observação de turmas dos anos finais do ensino fundamental, nos Estágios Supervisionados e no Programa de Residência Pedagógica, e a discussão com professores de matemática que atuam nesse segmento, mostraram que essa problemática se agrava com a introdução de conteúdos marcados pela abstração. Por isso, a álgebra, devido ao seu caráter abstrato, acaba por ser um dos campos no qual os alunos mais apresentam dificuldades.

A análise de conteúdos algébricos em documentos educacionais, currículos escolares e livros didáticos, bem como a observação de como estes eram aplicados em sala de aula, trouxe à tona um conteúdo que gera dificuldades tanto nos professores, quanto nos alunos: as *equações do segundo grau.*

As equações do segundo grau são tradicionalmente ensinadas por meio da memorização da fórmula resolutiva e sua repetida aplicação em questões cujo enunciado pede, unicamente, que os alunos determinem a solução. Nesse processo, as equações são dadas sem se mostrar de onde vêm, por que devemos aprender a resolvê-las e para que aquele conhecimento serve.

Embora o ensino dito tradicional ainda predomine nas salas de aula, algumas mudanças vêm ocorrendo no cenário do ensino dessas equações. A análise de livros didáticos mais recentes, por exemplo, mostrou que, mais do que a simples aplicação da fórmula, alguns autores têm se preocupado em valorizar seu processo de construção, incluindo em suas obras aplicações — tanto dentro da própria matemática, quanto em outras áreas de conhecimento. Menções à História da

Matemática também têm se tornado frequentes, ainda que, na maioria das vezes, os fatos históricos apareçam como *curiosidades.*

Entretanto, as inovações nos livros didáticos não são suficientes para garantir profundas modificações no ensino. Da mesma forma que alguns livros apresentam avanços, outros permanecem seguindo o modelo tradicional. Além disso, o papel do livro em sala de aula é de ferramenta auxiliadora. A forma como um tema é ensinado depende do professor e cabe a ele explorar, adaptar, estruturar significados e, quando necessário, complementar o conteúdo, para então trabalhá-lo didaticamente com os alunos. Também é necessário um olhar atento do professor sobre os obstáculos com os quais os alunos se deparam, principalmente porque eles podem acabar impedindo a obtenção de outros conhecimentos.

A partir de uma pesquisa realizada em escolas na Tailândia, Vaiyavutjamai e Clementes (2006) expõem algumas das principais dificuldades dos alunos em relação às equações do segundo grau. Dentre as citadas por eles, destacam-se duas, as quais podem ser observadas com regularidade nas salas de aula: alguns alunos não compreendem o que a solução representa, por isso não sabem como verificar se as soluções estão corretas; muitos não percebem que se uma incógnita aparece duas vezes, então tem o mesmo valor nas diferentes "posições".

Uma mesma dificuldade está intrínseca às duas citadas anteriormente: a incompreensão da igualdade. Quando escrevemos $3 + 7 = 10$, o aluno compreende o significado do sinal de igualdade como um separador entre os números que estão sendo operados e o resultado dessa operação. Já na equação $x + 7 = 10$, por exemplo, o sinal de igualdade representa um equilíbrio a ser mantido e muitos alunos têm dificuldade em compreender que os procedimentos adotados têm por objetivo encontrar um valor que satisfaça a igualdade. Outras dificuldades também são frequentes. Não é incomum o aluno não compreender a equação fatorada e, para resolvê-la, optar por aplicar a propriedade distributiva e usar a fórmula resolutiva. Ou ainda, não compreender a presença do "$\pm$" na fórmula e a possibilidade de existirem até duas soluções.

As dificuldades dos professores em ensinar esse conteúdo estão relacionadas, entre outros fatores, ao fato de que sua contextualização e possíveis aplicações não são tão claras. Assim, muitos acabam por reduzir o estudo das equações do segundo grau ao uso da fórmula.

De fato, essas aplicações e contextualizações não são tão evidentes, mas elas existem, inclusive dentro da própria matemática. Isso pode ser visto, por exemplo, em problemas sobre o cálculo de áreas retangulares. Problemas desse tipo vêm aparecendo com frequência em livros didáticos e parecem, inclusive, ter motivado povos antigos a desenvolverem estudos sobre essas equações.

Assim, embora as equações do segundo grau sejam parte do campo da álgebra, podem também ser vistas em outros campos da matemática, como a geometria. Logo, ocorreu-me que o ensino desse conteúdo pode ser feito utilizando-se, além dos conceitos algébricos, de conceitos geométricos e aritméticos, integrando esses campos.

Dessa forma, o objetivo geral do presente trabalho é propor uma sequência didática para o ensino das equações do segundo grau que integre os campos da aritmética, geometria e álgebra.

Para realização do objetivo geral, temos os seguintes objetivos específicos: embasar teoricamente a proposta de integração dos campos da aritmética, geometria e álgebra; definir e realizar um levantamento histórico sobre as equações do segundo grau; elaborar uma sequência didática para o ensino de equações do segundo grau.

A pesquisa está dividida em três capítulos.

No primeiro capítulo, discutiremos as características de cada um dos campos da matemática aqui abordados e sua importância. Faremos, também, uma breve retrospectiva sobre o ensino de matemática no Brasil, destacando o papel dos respectivos campos nos diferentes momentos. Por último, discutiremos a proposta de integração, fundamentando-a dos pontos de vista pedagógico e psicopedagógico.

No segundo capítulo, será apresentada uma breve introdução às equações do segundo grau — definição, considerações sobre o ensino no Brasil, algumas aplicações. Em seguida, faremos um levantamento histórico sobre os principais momentos que compõem a história dessas equações, mostrando diferentes abordagens e o desenvolvimento dos estudos sobre as mesmas. Nessa análise, será possível compreender o papel de cada um dos três campos na composição do conteúdo e justificará algumas das atividades da sequência didática.

Por fim, no terceiro capítulo, trataremos algumas características da proposta de sequência didática, seguida pela apresentação das atividades que a compõem.

CAPÍTULO 1. INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA

A matemática é composta por diversos campos de estudo, cada um com vocabulário, características, conteúdos e simbologia particulares. Dentre esses campos, no cenário da educação básica, destacam-se a aritmética, a álgebra e a geometria.

A aritmética, que estuda as propriedades dos números e as operações que com eles se pode realizar, é considerada um dos campos mais elementares — especialmente por abordar conceitos vistos em nosso cotidiano. A geometria estuda as características das curvas e das formas no plano e no espaço. Já a álgebra, é caracterizada, principalmente, pela generalização, o uso de uma simbologia que mescla números, letras e sinais, e a busca pela solução de problemas com valores desconhecidos.

De forma geral, temos contato com os dois primeiros campos citados já nos anos escolares iniciais, quando aprendemos a contar, realizar as operações fundamentais e a reconhecer formas geométricas. Os conteúdos algébricos, por sua vez, surgem nos anos seguintes e adquirem grande importância.

Entretanto, por mais distintos que possam ser, em algum momento os campos da matemática acabam se relacionando. Os conhecimentos matemáticos não são independentes nem seguem uma linha contínua. É comum que, ao aprendermos um conteúdo novo, façamos uso de outros ou revisitemos conceitos já vistos, inclusive aqueles pertencentes a outros campos. Não podemos, por exemplo, calcular a área de uma figura geométrica se não soubermos realizar as operações aritméticas. Tampouco podemos garantir uma aprendizagem completa do conteúdo de *funções* sem que sejam estudados os processos algébricos, de resolução, e os geométricos, de construção e interpretação dos gráficos.

O ensino fragmentado, como usualmente ocorre nas escolas, pode resultar na supervalorização de um campo e o esquecimento de outro. Como consequência, podem ser deixadas lacunas na aprendizagem, que vão agravar as dificuldades e afetar a capacidade de se estabelecer relações entre os conteúdos.

No Brasil, o ensino de matemática passou por diversas modificações, desde currículos que pouco priorizavam os conhecimentos matemáticos de forma geral, políticas educacionais que defendiam a existência de várias “matemáticas”, até a confecção de documentos e estudos relacionados à Educação Matemática, que reconheceram a necessidade de integração e de valorização dos diversos campos.

Para melhor compreendermos as consequências dessas transformações no atual cenário educacional e o porquê de promover um ensino que contemple os diferentes campos da matemática e os integre, façamos uma breve análise do ensino de matemática no Brasil.

1.1. O Ensino de Matemática no Brasil

Após o “descobrimento”, o ensino no Brasil ficou a cargo dos padres da Companhia de Jesus. O primeiro grupo de padres chegou ao país em 1549 e eles foram responsáveis pela fundação das primeiras escolas elementares. Nessas escolas, os estudos matemáticos eram pouco desenvolvidos, se limitando ao ensino de conceitos aritméticos básicos, necessários ao cotidiano, como a escrita dos números na base decimal e o estudo das quatro operações fundamentais com números naturais (GOMES, 2013, p. 14). Tinham acesso à essa educação apenas indivíduos do sexo masculino.

Por mais de dois séculos a educação formal se manteve sob controle da Igreja, que também possuía grande influência sobre outras áreas da cultura. O papel de importância assumido pelos jesuítas passou a ir contra o caráter secularizador das reformas empreendidas por Pombal no século XVIII, e as discordâncias de caráter político originaram problemas da Coroa com os mesmos. O ano de 1759, em especial, foi marcado por uma série de reformas políticas, econômicas e culturais em Portugal, promovidas pelo ministro Sebastião José de Carvalho e Melo, que resultaram na expulsão dos jesuítas do império português. Em 28 de junho desse ano foi emitido o alvará que estabeleceu em Portugal e suas colônias as *aulas régias* (CAMARGO, 2013).

Constam no alvará régio duras críticas ao método educacional dos jesuítas, descrito como “pernicioso”, “fastidioso” e de “mau gosto” (PORTUGAL, 1759). Contudo, o método das aulas régias não se mostrou muito mais eficaz do que o anterior. As aulas, que abordavam assuntos específicos de forma isolada, tratavam dos *Estudos Menores*, no qual predominavam as disciplinas humanas e pouco espaço destinavam à matemática.

> Os Estudos Menores eram formados pelas Aulas de ler, escrever e contar, também chamadas de primeiras letras, como aliás ficaram mais conhecidas, e também pelas Aulas de humanidades, que abrangiam inicialmente as cadeiras de gramática latina, língua grega, língua hebraica, retórica e poética, mas foram acrescidas ao longo dos anos com outras cadeiras, como por exemplo filosofia moral e racional, introduzida a partir de 1772. (CARDOSO, 1999, p. 106).

As medidas previstas no alvará de 28 de junho começaram a ser implementadas no Brasil ao fim do mesmo ano, mas logo surgiram problemas estruturais, como a falta de professores. Os primeiros concursos públicos foram realizados no ano seguinte, porém, até 1765 nenhum professor fora nomeado (CAMARGO, 2013).

Novas medidas foram adotadas, com o objetivo de sanar os problemas existentes, porém não ocorreram grandes alterações até o século XIX. Ainda assim, é interessante ressaltar que, ao longo do tempo, a ação educacional das aulas régias sobre a população aumentou, uma vez que os professores régios abrangeram o ensino a mulheres e negros (MONTI, 2018, p. 80).

Em 1808, motivada pela iminente invasão de Portugal pelas tropas de Napoleão Bonaparte, a família real chegou ao Brasil. Com a adoção apressada de uma nova sede monárquica — na cidade do Rio de Janeiro —, houve urgência em se preparar profissionais para atuarem nas áreas de administração e defesa militar. Assim, o ensino superior foi impulsionado pelo príncipe regente através da criação de diversas escolas, dentre elas a Real Academia de Guardas-Marinha e a Academia Real Militar (CARVALHO, 2014, p. 339).

A Real Academia de Guardas-Marinhas — criada em Portugal em 1782 e instituída no Brasil em 1808 — possuía um curso Matemático composto de três anos letivos. No primeiro ano eram estudados conteúdos de Aritmética, Geometria e Trigonometria Reta, bem como seus usos práticos próprios aos oficiais do mar. No segundo ano eram vistos os princípios de Álgebra, até as equações do segundo grau, e suas aplicações na Aritmética e Geometria, e as secções cônicas. O último ano dedicava-se ao estudo da Trigonometria Esférica. Além disso, eram ensinadas as práticas militares marítimas (PORTUGAL, 1796, p. 267-268).

O curso completo da Academia Real Militar — criada pela carta de lei de 4 de dezembro de 1810 — tinha duração de sete anos e os dois primeiros eram intensamente compostos por conteúdos matemáticos.

Quadro 1 – Conteúdos abordados nos dois primeiros anos do curso da Academia Real Militar em 1810

Ano	Conteúdos abordados
1°	Álgebra (até as equações do terceiro e do quarto grau); Geometria; Trigonometria Retilínea; primeiras noções de Trigonometria Esférica; e Desenho.
2°	Repetia e ampliava as noções de Cálculo já dadas no primeiro ano; métodos de resolução de equações; aplicações da Álgebra à Geometria das linhas e das curvas, tanto as de segundo grau, quanto as superiores; Cálculo Diferencial e Integral, mostrando suas aplicações nos campos da Física, Astronomia e Cálculo das Probabilidade; Geometria Descritiva.

Fonte: Adaptado de Brasil (1810, p. 234-236).

Nos dois anos seguintes os conhecimentos matemáticos obtidos eram aplicados a outros campos científicos, como a Física e a Astronomia, e no quarto ano estudava-se a Trigonometria Esférica. Os três últimos anos eram voltados aos estudos militares (BRASIL, 1810).

A elaboração da Constituição de 1824, após a independência do Brasil, afirmava o direito à educação primária gratuita aos cidadãos brasileiros. Porém, foi somente após a criação da lei de 15 de outubro de 1827 que se estabeleceu a criação de escolas primárias em todas as cidades, vilas e lugares mais populosos do império (GOMES, 2013, p. 15).

É importante ressaltar que, apesar dos aparentes avanços, esse período ficou marcado por uma sociedade e, consequentemente, uma política educacional que segregava e limitava o acesso à educação. Tal política chega a ser reafirmada pela lei de outubro de 1827, com a diferenciação dos conteúdos a serem lecionados, de acordo com o sexo dos educandos:

> É interessante notar que a lei de outubro de 1827 diferenciava a educação para meninos e meninas, prevendo escolas separadas para os dois sexos. O currículo para as escolas de meninos envolvia "ler, escrever, as quatro operações aritméticas, prática de quebrados, decimais e proporções, noções gerais de geometria, gramática da língua nacional, moral cristã e doutrina católica". As escolas para meninas existiriam nas localidades mais populosas, seriam dirigidas por professoras e em seu currículo eliminava-se a geometria e a prática de quebrados, incluindo-se o ensino de práticas importantes para a economia doméstica. (GOMES, 2013, p. 14-15).

Nesse período, podemos notar uma ampliação dos conteúdos matemáticos que eram lecionados, ainda que essa ampliação tenha ficado restrita a um determinado grupo da sociedade.

Em 1837, foi fundado o Imperial Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, que se tornou uma instituição secundária modelo do Brasil. Tinha presente em todas as suas séries as “matemáticas”, que eram as disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria e, posteriormente, Trigonometria, apesar do predomínio das disciplinas literárias e humanistas (GOMES, 2013, p. 16).

O público alvo do ensino secundário durante esse período era constituído, fundamentalmente, pela elite econômica masculina do país. Foi apenas na década de 1880 que algumas mulheres passaram a estudar no Colégio Pedro II (GOMES, 2013, p. 16-17).

Depois da Proclamação da República, em 1889, por meio do decreto n°346, de 19 de abril de 1890, foi criada a Secretaria de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos que, dentre outros serviços, ficou responsável pela instrução pública (BRASIL, 1890). A administração da secretaria ficou a cargo de Benjamin Constant, grande defensor dos ideais de Augusto Comte e do positivismo. Constant decretou uma reforma educacional, instituindo um novo currículo no Colégio Pedro II e introduziu no secundário conteúdos matemáticos avançados, como o cálculo diferencial e integral (CARVALHO, 2014, p. 348).

Apesar das diversas reformas, no início do século XX a maioria da população ainda não tinha acesso à educação. Quanto ao ensino de matemática, nas escolas primárias eram ensinadas as operações necessárias ao cotidiano e às atividades comerciais e algumas noções geométricas; enquanto que nas escolas secundárias, destinadas ao preparo para o ingresso no ensino superior, os conteúdos matemáticos permaneciam separados, com tratamentos abstratos e sem nenhuma preocupação com suas aplicações práticas (PAVANELLO, 1993, p. 8).

Em 1908, ocorreu em Roma o quarto Congresso Internacional de Matemática, onde foi criado o Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission (IMUK). A comissão, presidida pelo matemático alemão Felix Klein, tinha por objetivo reformar o currículo matemático do ensino secundário em vários países e muitas das ideias de Klein foram incorporadas nesse movimento.

Nessa época, o cenário europeu estava marcado pela industrialização e modernização, fazendo-se necessárias transformações na estrutura dos sistemas educacionais. As propostas de Klein tinham por objetivo introduzir nas escolas secundárias um ensino de matemática voltado para o pensamento funcional — isto é, que mostrasse as aplicações práticas da matemática —, defendendo que os conceitos de *funções* deveriam ser ensinados desde cedo (SOUZA, 2010, p. 4-5). Klein também compreendia os problemas na transição do ensino secundário para o ensino superior e estava familiarizado com os principais problemas enfrentados pelos professores de matemática nas escolas (SCHUBRING, 2014, p. 248).

As propostas da IMUK para o nível secundário foram a unificação dos campos matemáticos em uma única disciplina; o rigor, a intuição e a experiência no ensino de matemática (SCHUBRING, 1999, p. 45).

Foi apenas em 1927 que essas ideias modernizadoras ganharam força no Brasil, quando o então diretor do Colégio Pedro II, Euclides Roxo, influenciado pelas ideias de Klein, propôs à congregação do colégio alterações no currículo. Uma das propostas apresentadas foi a unificação da Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria em uma única disciplina: a Matemática (GOMES, 2013, p. 19). Além disso, ele propôs um ensino de matemática relacionado a aspectos presentes no cotidiano dos alunos (SOUZA, 2010, p. 45).

Roxo também propunha a adoção de uma metodologia que, primeiramente, enfatizasse a intuição.

> Os conceitos a serem ensinados deveriam obedecer a uma sequência que facilitasse o aprendizado dos conteúdos da matemática. Assim, necessário seria partir de um conhecimento intuitivo para depois atingir a forma mais abstrata e formal que a matemática adquiriu através dos séculos. (DUARTE, 2019, p. 307).

Segundo Souza (2010, p. 45), Roxo considerava a Geometria uma forma de “fazer a matemática entrar pelos olhos”. Uma vez compreendidos os aspectos visuais da matemática, seriam trabalhados os conceitos abstratos. A Geometria — devido ao caráter intuitivo proporcionado pela *visualização* da matemática — agiria como uma ponte entre os campos da matemática, justificando-se, assim, a proposta de unificação.

Além disso, seguindo a linha das ideias de Klein, Roxo atribuía fundamental importância ao conceito de *funções*, pois possibilitava a integração das diferentes áreas. Ele também destacava o potencial interdisciplinar da matemática (DUARTE, 2019, p. 307-308).

As reformas de Roxo foram implantas no Colégio Pedro II a partir de 1929 e no restante do Brasil em 1931, por meio da Reforma Francisco Campos. Entretanto, as mudanças, que deveriam ter ocorrido de forma gradual, devido ao seu caráter revolucionário, foram realizadas de uma só vez com uma série de decretos que propunham organizar a educação no país (GOMES, 2013, p. 19). Essa proposta foi duramente criticada: professores tiveram dificuldade em se adaptar e achavam que as novas propostas rebaixavam o ensino; defensores das humanidades clássicas consideravam os conteúdos propostos excessivos; conservadores defendiam o ensino tradicional; etc. Dessa forma, em 1942, com a Reforma Capanema, houve um recuo ao ensino tradicional.

Ainda que não tenha obtido sucesso, alguns reflexos da Reforma Francisco Campos podem ser vistos nos dias de hoje, como a fusão da Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria e a obrigatoriedade de um currículo da educação básica que contemple os diversos campos.

O ensino da Matemática no Brasil voltou a sofrer mudanças no final da década de 1950, com a realização dos primeiros congressos nacionais de ensino de matemática.

Em setembro de 1955 ocorreu em Salvador o I Congresso Nacional de Ensino de Matemática, que contou com a presença de professores de diversos estados. Foram discutidas as falhas dos programas educacionais, os currículos, aperfeiçoamento de professores da área e métodos de ensino — recomendando-se evitar o uso excessivo de abstração teórica. No II Congresso, em 1957, as discussões foram ampliadas, propondo-se discutir e estudar a aprendizagem de matemática nos diferentes níveis de ensino. Em ambos os congressos foram feitas críticas ao ensino tradicional e foram abordadas algumas das propostas de Felix Klein. O III Congresso, no Rio de Janeiro em 1959, aprofundou as discussões a respeito da formação de professores. O professor Alexandre Martins Rodrigues sugeriu a divisão em duas partes do curso de cinco anos de Matemática: três anos para disciplinas obrigatórias; e dois para cursos optativos de formação do professor. Outra importante decisão foi propor ao Ministério da Educação e Cultura que não mais fosse concedido a licenciados de outros cursos o registro de professor de Matemática (SOARES, 2005).

Em 1961, acompanhando uma tendência mundial, começou a tomar forma no Brasil o Movimento da Matemática Moderna. O IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática, em 1962, tratou de forma mais objetiva sobre a adoção dessa tendência.

Surgido da percepção dos Estados Unidos de sua inferioridade científica e tecnológica em relação à União Soviética, esse movimento se espalhou também por países da Europa e buscava renovar o ensino, através da atualização curricular e introdução de uma Matemática desenvolvida mais recentemente.

Para a Geometria, por exemplo, propunha-se a substituição da abordagem tradicional, apoiada nos Elementos de Euclides e no rigor com as demonstrações, pelo estudo de transformações geométricas: vetores, espaço vetorial e transformação linear (GOMES, 2013, p. 24).

Um dos principais objetivos do Movimento da Matemática Moderna era integrar os campos Aritmética, Álgebra e Geometria, mas isso não aconteceu de forma igualitária, isto é, dando devido espaço a cada um dos campos. A Álgebra se tornou uma prioridade, enquanto que os demais campos foram parcialmente ou totalmente deixadas de lado, como a Geometria, que foi reduzida a um conjunto de nomes, propriedades e fórmulas, desligada de relações com o mundo físico. Configurou-se, então, o que muitos autores classificaram como o *abandono da Geometria no Brasil*, que subsistiu até a década de 1990 (GOMES, 2013, p. 24-25).

> O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje. (LORENZATO, 1995, p. 4).

Ao fim da década de 1970, a Matemática Moderna havia se mostrado um fracasso no ensino. Novas propostas educacionais surgiram, tendo como base três temas centrais: números, medida e geometria, temas estes que haviam sido deixados de lado devido ao Movimento (GOMES, 2013, p. 26).

O final do século XX e início do século XXI foi marcado pelo aumento das pesquisas na área de Educação Matemática. Esse aumento expressivo reflete as preocupações com o processo de ensino e aprendizagem. É importante ressaltar que, além dos aspectos internos referentes à matemática, a educação escolar é diretamente influenciada por fatores externos à escola — a comunidade que a cerca, a cultura, política, fatores econômicos, etc. —, e esses fatores são discutidos e explorados nessas pesquisas.

Esses estudos possibilitaram a confecção de importantes materiais e documentos para a educação brasileira, como os Parâmetros Curriculares Nacionais

(PCN) — uma série de diretrizes elaboradas pelo governo federal com o objetivo principal de orientar os educadores, que foram publicadas entre os anos de 1997 e 2000. Um outro exemplo é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cuja primeira versão foi disponibilizada em 16 de setembro 2015. Esse documento foi desenvolvido com o objetivo de nortear a formulação dos currículos escolares de todo o Brasil e indicar as habilidades e competências que se espera que os estudantes desenvolvam.

A matemática, atualmente, é reconhecida como uma disciplina única e composta por diversos campos, que devem ser contemplados, ensinados e relacionados:

> Atualmente, há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento). (BRASIL, 1998, p. 49).

1.2. Por que Ensinar Integradamente Aritmética, Geometria e Álgebra?

Como visto anteriormente, apesar de nem sempre ter ocupado uma posição de destaque, desde os primórdios da educação escolar no Brasil a matemática tem sido ensinada. Com o passar dos séculos, essa área de conhecimento foi adquirindo importância, ganhou mais espaço nos currículos e ampliaram-se os estudos de seus campos. Atualmente a matemática é vista como uma disciplina única e há uma crescente preocupação com um ensino que contemple seus diferentes campos, estabelecendo-se as devidas relações entre eles. Mas quais as razões por trás dessa preocupação? Mais do que isso, por que ensinar de forma integrada?

A seguir, discutiremos a proposta de integração, justificando-a nos pontos de vista pedagógico e psicopedagógico.

1.2.1. Ponto de vista pedagógico

Cada um dos campos possui suas particularidades e importância. A aritmética e a geometria são os campos com os quais temos contato de forma mais natural, uma vez que os números e as formas geométricas estão presentes em diversas situações em nosso cotidiano. Além disso, é a geometria que possibilita o contato visual com conceitos matemáticos. O estudo da álgebra, por sua vez, constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização (BRASIL, 1998, p. 115).

Para compreendermos porque o ensino deve contemplar esses campos, levemos em consideração, primeiramente, o levantamento cronológico feito anteriormente. Até o século XIX, a educação no Brasil era básica e os conteúdos matemáticos ensinados eram limitados a conceitos de aritmética e, posteriormente, de geometria. Entretanto, por mais aplicáveis que esses conhecimentos sejam, não são suficientes para atender uma sociedade em expansão política, econômica, cultural, científica e tecnológica.

Como visto, diversos foram os momentos de transformações na sociedade brasileira — a chegada dos portugueses, a vinda da família real, a independência do Brasil, a proclamação da república, entre outros. Cada um desses momentos resultou em mudanças no cenário educacional e tornaram necessários estudos sobre os demais campos da matemática, como a Álgebra e a Trigonometria a partir de 1808.

Tal necessidade está diretamente relacionada ao fato de que os conceitos matemáticos não são construídos em sequência linear, muito menos de forma isolada (LORENZATO, 2006, p. 69). Dessa forma, um estudo mais aprofundado da matemática requer o trânsito pelos campos e a compreensão das relações existentes entre eles.

A proposta de um ensino de matemática que integre diferentes campos não é algo recente. As propostas de unificação das “matemáticas” de Euclides Roxo, em 1927, refletiam suas preocupações com o ensino fragmentado. A integração dos campos também era um dos objetivos do Movimento da Matemática Moderna, e foi justamente a ausência dela um dos fatores que resultaram no fracasso desse movimento no Brasil.

Atualmente, a necessidade de se compreender as relações entre os campos é reafirmada em uma das competências específicas da matemática para o Ensino Fundamental da Base Nacional Comum Curricular (BNCC): “compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento [...]” (BRASIL, 2017, p. 267).

Entretanto, não é incomum que os campos sejam abordados separadamente em sala de aula, sem que sejam esclarecidas suas devidas conexões. Algumas escolas chegam a adotar explicitamente a separação em suas grades: ao invés da disciplina *Matemática*, existem as disciplinas *Geometria* e *Álgebra*. Uma vez que os campos são ensinados separadamente, os pensamentos referentes a eles também são, resultando em uma aprendizagem fragmentada.

Lorenzato (2006), defensor do ensino intradisciplinar — isto é, o ensino integrando diferentes campos da matemática —, corrobora a importância desse ensino:

> [...] é falacioso pensar que conhecendo partes do todo, já conhece o todo. Por isso, todos os campos da matemática previstos no currículo oficial devem ser ensinados, e mais, de modo integrado. Se concordarmos com as vantagens do ensino interdisciplinar, com mais forte razão devemos professar o ensino intradisciplinar, o qual pode ser reduzido, sinteticamente, ao ensino integrado da aritmética, geometria e álgebra. (LORENZATO, 2006, p. 60).

Cabe ressaltar que a proposta de intradisciplinaridade não tem por objetivo isolar a matemática dentro de si própria, isto é, sem se estabelecer relações com outros assuntos e áreas de conhecimento. O que a intradisciplinaridade propõe é que as ramificações da Matemática não estejam dissociadas, como se houvessem subdisciplinas isoladas (FARIA, 2016, p. 65).

> Considero que a falta de relação e consistência intradisciplinar origina inúmeras dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. É nesse sentido que argumento sobre a necessidade de uma abordagem concomitante de aspectos algébricos, aritméticos e geométricos, pois quando o conteúdo matemático é apresentado em compartimentos, sem propiciar formas de visualizar a coerência da totalidade, a aprendizagem fica comprometida. Por isso, o ensino de Matemática deve estar relacionado com as ligações entre técnicas, procedimentos, fenômenos, conceitos e processos referentes às ramificações da Matemática. (FARIA, 2016, p. 65).

1.2.2. Ponto de vista psicopedagógico: a teoria dos campos conceituais

Em sua teoria psicológica dos campos conceituais, Gèrard Vergnaud trata de conjuntos de conceitos que, embora possam ser consistentemente descritos como distintos uns dos outros, não são independentes e, além disso, estão intimamente relacionados.

> Vergnaud toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. (MOREIRA, 2002, p. 8).

Vergnaud define campo conceitual como “um conjunto heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e que provavelmente se entrelaçam durante o processo de aquisição". Assim, por exemplo, os conceitos de multiplicação, divisão, fração, razão, função linear, etc., pertencem ao campo conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1982, p. 40).

Plaisance & Vergnaud (2003, p. 76) reforçam que um conceito ganha sentido em situações de grande variedade; e situações não são analisadas graças a um conceito, mas sim ao conjunto deles. Assim, o domínio de um campo conceitual exige uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas estreitamente conectados (MAGINA, 2005, p. 4), e ocorre ao decorrer de um longo período de tempo, de forma progressiva.

A teoria de Vergnaud reafirma que existem relações entre diferentes conceitos e que uma aprendizagem completa requer a compreensão dessas relações. Dessa forma, uma vez que muitos conteúdos matemáticos estão ligados a diferentes campos, o ensino integrado — desde que feito de forma coerente, respeitando as características de cada campo — é natural e necessário.

CAPÍTULO 2. EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

O estudo das equações compõe um importante momento da educação escolar. O sinal de igual, que até então indicava algo a ser completado com uma resposta final, passa a ter um novo significado. Em uma equação, a igualdade já está estabelecida, cabendo a quem a resolve encontrar o valor desconhecido que torne a igualdade verdadeira.

As equações polinomiais do segundo grau, também chamadas equações quadráticas, são aquelas representadas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são os coeficientes ($a \neq 0$), e podem ser classificadas como *completas*, quando $a, b, c \neq 0$, ou *incompletas*, quando tem-se $b = 0$ e/ou $c = 0$. Sua resolução consiste em encontrar o valor para x que torne a igualdade verdadeira e pode ser obtida através da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. No caso das equações incompletas, o resultado pode ser, também, encontrado através de manipulações algébricas.

Quadro 2 – Solução de equações incompletas por meio de manipulações algébricas

$b = 0$	$c = 0$
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = \frac{-c}{a}$ $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x \cdot (ax + b) = 0$ $x = 0;$ $ax + b = 0$

Fonte: Autoria própria

Os conceitos iniciais a respeito desse conteúdo são introduzidos a partir do oitavo ano escolar. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é nessa série que os alunos devem “aprender a resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$” (BRASIL, 2017, p. 313). Nos anos seguintes, aprofundam-se esses conhecimentos com o estudo dos métodos para resolução dos diferentes casos, dos produtos notáveis, dos processos de fatoração, e das funções quadráticas, no Ensino Médio.

Ainda que sejam estudadas em diversos momentos, não é incomum os alunos concluírem a educação básica sem compreender totalmente essas equações. Ou ainda, sem entender o porquê de terem visto sucessivamente um conteúdo para o qual não veem aplicabilidade. Isso porque “não aprendemos equações, mas o modo de resolvê-las” (ROQUE, 2014, p. 169).

Em muitos casos, as equações do segundo grau são apresentadas sem devida contextualização e os alunos são conduzidos a resolver os exercícios através de procedimentos memorizados e práticas massivas de repetição. No melhor dos casos, o conteúdo é introduzido por meio do cálculo da área de retângulos, buscam-se relações com outras áreas de conhecimento ou são utilizadas tecnologias — o que nem sempre é suficiente para sanar uma dúvida frequente nos alunos: *para que isso serve?*

Quando se trata das equações de segundo grau, podemos responder a essa questão citando problemas que envolvam áreas, a importância das parábolas — curvas cuja representação algébrica são equações do segundo grau, e são importantes por suas aplicações nos campos da física e da engenharia —, a razão áurea e sua aplicabilidade no campo da arquitetura, entre outras.

Essa resposta, porém, talvez não seja totalmente satisfatória, principalmente porque, ao fazerem tal questionamento, os alunos esperam situações cotidianas em que aplicarão diretamente a fórmula de resolução. Quando percebem que, a menos que escolham determinadas carreiras profissionais — como a física, a engenharia ou a própria matemática —, não usarão a fórmula, deixam de enxergar qualquer utilidade para aquele conhecimento e acabam perdendo o interesse. Isso porque a forma como o conteúdo é transmitido em sala de aula, na maioria das vezes, acaba por reduzir as equações do segundo grau à aplicação da fórmula e nada mais, de modo que os alunos sequer são levados a refletir sobre o que estão fazendo ou o raciocínio por trás dos procedimentos realizados.

Para a obtenção de melhores resultados na aprendizagem, é necessário mostrar não apenas a fórmula, mas também as aplicações, os diferentes métodos de resolução e as reflexões por trás dos mesmos.

Essas reflexões são frutos de matemáticas que, embora distintas da que temos nos dias de hoje, tiveram importância na composição do tema como o conhecemos atualmente. Assim, para melhor compreendermos as equações do segundo grau, seu surgimento e ampliarmos nossa visão para além da fórmula resolutiva, façamos uma retrospectiva histórica de como diferentes povos e matemáticos abordavam esse assunto.

2.1. A Evolução das Equações do Segundo Grau

Os primeiros registros completos de estudos sobre as equações do segundo grau datam do segundo milênio antes da Era Comum, feitos pelos babilônicos. É importante ressaltar que não podemos definir esse momento como o *início*, ou *surgiment*o, dos estudos sobre essas equações. Outros povos podem ter estudado e desenvolvido métodos próprios bem antes disso, e os que desenvolveram estudos posteriores não necessariamente tinham conhecimento dos métodos babilônicos.

A seguir, comentaremos alguns momentos que compõem a história das equações do segundo grau. Faz-se necessário reforçar que o desenvolvimento histórico da matemática, como um todo, não é linear e que, embora tenhamos tentado seguir uma ordem cronológica, não se pode afirmar com convicção que existam relações entre alguns dos momentos analisados. É por isso que os mesmos serão escrutinados separadamente.

2.1.1. Os babilônios

A tradição de fazer seus registros em tabletes de argila — material de grande durabilidade —, possibilitou a preservação dos registros babilônicos ao decorrer dos milênios. Usuários do sistema numérico sexagesimal posicional, esse povo possuía uma matemática bastante desenvolvida. Há várias possibilidades para a escolha desse sistema e, segundo Smith (1958, p. 41), a mais provável é que o número sessenta tenha sido escolhido devido aos seus muitos divisores, que tornavam o trabalho com frações mais simples.

Além das operações fundamentais, os babilônios também resolviam potências e raízes quadradas e registravam os resultados em tabletes. Em um sistema numérico como o sexagesimal, alguns cálculos podem ser mais complexos do que seriam, por exemplo, no sistema decimal. Por isso, alguns tabletes tinham funcionalidade equivalente a das nossas *tabuadas* e a maioria das operações eram diretamente realizadas com o auxílio deles (ROQUE, 2012, p. 57).

Através de uma análise filológica dos textos babilônicos, o historiador matemático Jens Høyrup sugeriu que grande parte dos problemas matemáticos eram formulados e resolvidos em contexto geométrico, por meio do que ele chamou "geometria ingênua" ou "geometria corta-e-cola" (RADFORD, 2011, p. 136). Diferentemente dos dias atuais, onde os números constituem a representação fundamental, a representação fundamental com os babilônicos era geométrica, e a maioria de seus problemas trata do comprimento dos lados de retângulos e áreas (HØYRUP, 2017, p. 16, 17). Alguns desses problemas envolviam a resolução do que atualmente conhecemos como equações do segundo grau, por meio de procedimentos generalizados para se encontrar um valor desconhecido.

Um dos problemas mais conhecidos está enunciado na placa BM 13901, que faz parte da coleção do British Museum, traduzido por Høyrup (2017, p. 39) da seguinte forma: *a superfície e minha confrontação acumulei: obtive 0,45*[1] — valor este que está na base sexagesimal. Embora não esteja explícito no enunciado, supõe-se que o objetivo é encontrar a confrontação, que corresponde ao lado do quadrado.

A solução dada pelo escriba babilônico consiste nas seguintes etapas:

> (i) 1 é a projeção
> (ii) quebre 1 na metade (obtendo 0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15 ($0{,}30^2 = 0{,}15$)
> (iii) agregue 0,15 a 0,45
> (iv) 1 é o lado igual
> (v) retire do interior de 1 os 0,30 que você reteve
> (vi) 0,30 é a confrontação. (ROQUE, 2012, p. 66).

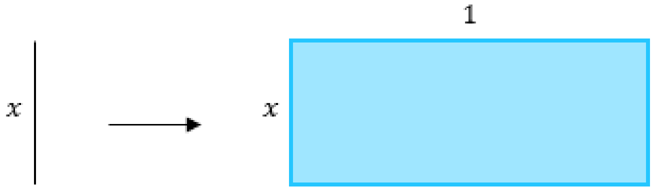
Observe que o problema trata da soma de uma área com um segmento de reta, grandezas geométricas de natureza distintas. Para "corrigir" essa disparidade, no passo (i), os babilônicos realizavam uma projeção de 1: o segmento de tamanho desconhecido era transformado em um retângulo cujo valor numérico da área era o mesmo do segmento.

É de extrema importância destacar que os babilônicos não faziam uso de incógnitas em sua notação, entretanto, por uma questão de melhor entendimento, atribuiremos letras aos lados desconhecidos. Assim, em termos atuais, o segmento desconhecido — ao qual atribuiremos o valor x — era transformado em um retângulo de lados 1 e x.

---

[1] Em sua obra, Høyrup denota esse valor por 45'. Uma outra notação, comum entre muitos historiadores, seria usar o ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária e a vírgula para separar os algarismos da parte inteira. Entretanto, faremos uso da representação adotada por Roque (2012): usaremos a vírgula para separar a parte inteira da fracionária, como é comum no Brasil, e o ponto e vírgula para separar os algarismos da parte inteira.

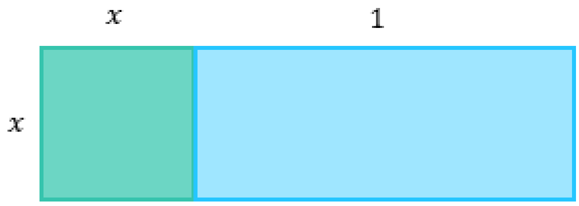
Figura 1 – Passo (i): projeção do lado desconhecido



Fonte: Autoria própria

Portanto, o acúmulo (a soma) da superfície e da confrontação é representado geometricamente conforme mostra a figura 2.

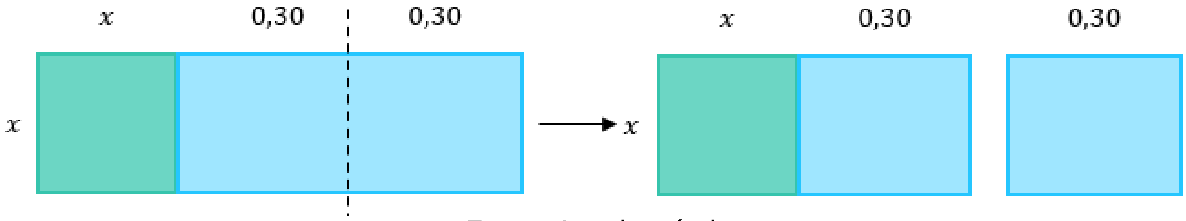
Figura 2 – Acúmulo da superfície e da confrontação



Fonte: Autoria própria

No passo (ii), "cortamos" 1 ao meio, obtendo dois retângulos iguais de lados 0,30 e x.

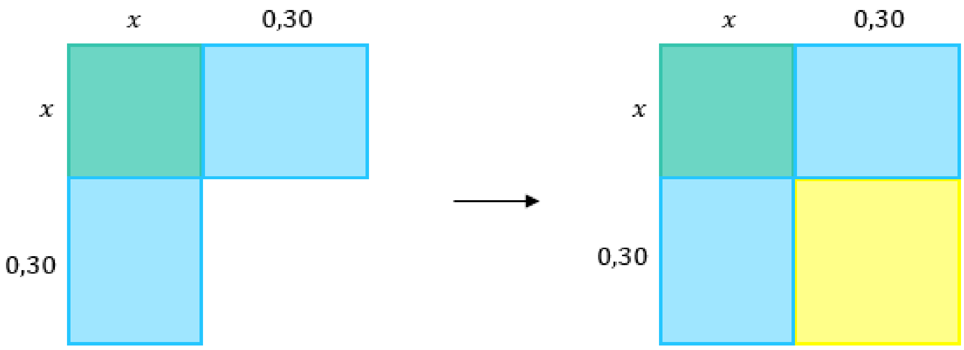
Figura 3 – Passo (ii): quebramos 1 na metade



Fonte: Autoria própria

Ao rearrumar a figura, é possível observar que os lados dos retângulos delimitam um quadrado de lado 0,30. Ainda no passo (ii), temos de "reter" esse quadrado, cuja área é 0,15 (pois $0{,}30^2 = 0{,}15$). No passo (iv), agregamos o quadrado obtido à área anterior, procedimento esse que conhecemos como *completar quadrado.*

Figura 4 – Passos (iii) e (iv): completando o quadrado



Fonte: Autoria própria

Sabemos que o acúmulo da superfície e da confrontação é 0,45, como é dito no enunciado, e a área do quadrado retido é 0,15. Assim, a área do quadrado originado é $0{,}45 + 0{,}15 = 1$. Como $\sqrt{1} = 1$, o lado do quadrado maior mede 1. Retirando o lado retido, temos $1 - 0{,}30 = 0{,}30$. Portanto, a confrontação é 0,30.

Atualmente, o mesmo problema poderia ser resolvido através de uma equação do segundo grau. Observe que na base decimal 0,45 equivale a $\frac{3}{4}$. Supondo um quadrado de lado x, a situação enunciada pode ser representada, em notação simbólica, por $x^2 + x = \frac{3}{4}$. Substituindo os valores dos coeficientes na fórmula resolutiva, temos:

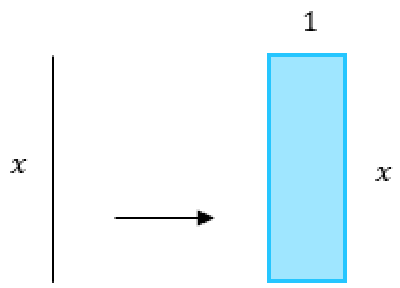
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2}$$

Lembremos que x corresponde ao lado do quadrado e, portanto, não faria sentido ter como solução um valor negativo. Assim, temos que $x = \frac{1}{2}$ ou, na base sexagesimal, $x = 0{,}30$.

Um segundo exemplo, também presente na placa BM 13901 e traduzido por Høyrup (2017, p. 43), traz o seguinte problema: *Minha confrontação dentro da superfície eu arranquei: obtive 14;30.*

As etapas para a resolução desse problema seguem alguns dos fundamentos do problema anterior: através uma projeção de 1, cria-se um retângulo de área x.

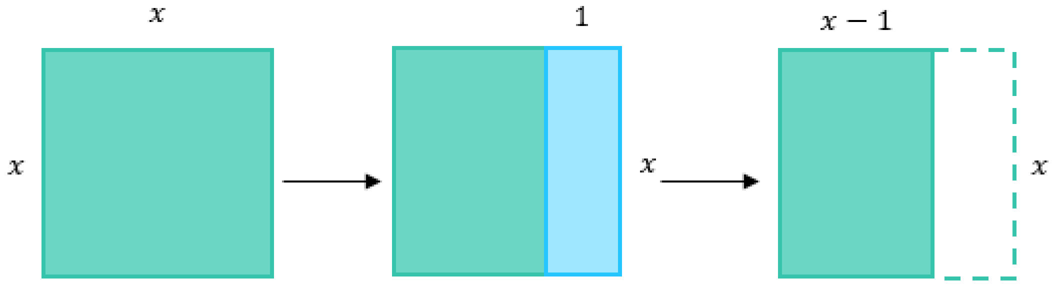
Figura 5 – Projeção do lado desconhecido



Fonte: Autoria própria

Dessa vez, entretanto, a confrontação está dentro da superfície e é “arrancada”, resultando em 14,30. Estamos, portanto, tratando de uma subtração. A retirada da confrontação resulta em um retângulo de lados $x - 1$ e x.

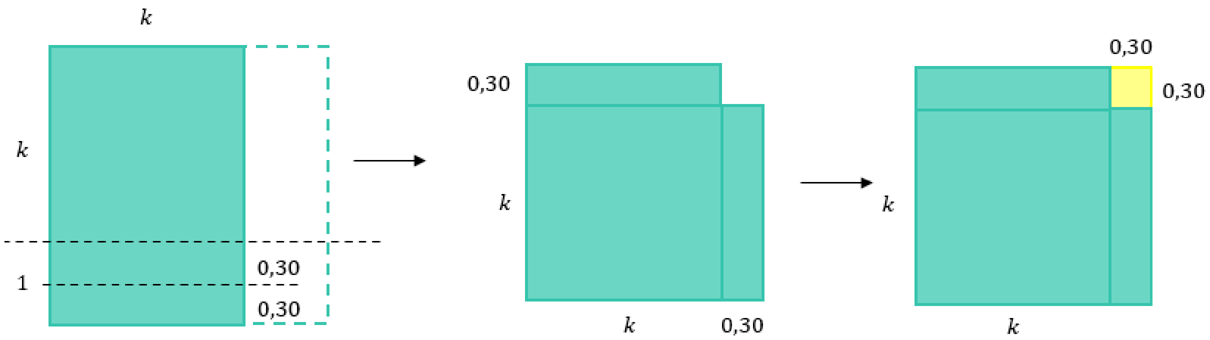
Figura 6 – "Arrancando" a confrontação da superfície



Fonte: Autoria própria

O passo seguinte consiste em transformar o retângulo em um quadrado. Para isso, "cortamos" 1 de x, obtendo um quadrado de lado $k = x - 1$ e um retângulo de lados 1 e k. Os passos seguintes são semelhantes aos do problema anterior: cortamos 1 ao meio, rearrumamos os retângulos e "retemos" o quadrado de lado 0,30.

Figura 7 – Realizando os procedimentos de "cortar e colar" e "completar quadrado"



Fonte: Autoria própria

A área do quadrado originado é 14;30,15 = 14;30 (superfície menos a confrontação) +0,15 (área do quadrado retido). Note que extrair a raiz desse número não é um processo tão fácil, ou rápido. Por isso a importância dos tabletes com resultados para os babilônicos, que permitiriam a obtenção imediata do valor 29,30. Assim, o quadrado de área 14;30,15 tem lado 29,30 $\left(\text{pois } \sqrt{14;30,15} = 29,30\right)$ e $k = 29,30 - 0,30 = 29$. Como $k = x - 1$, temos que $x = 29 + 1 = 30$. Logo, 30 é a confrontação.

Em termos modernos, o problema pode ser escrito como: $x^2 - x = 14;30$. Na base decimal, 14;30 equivale a $14 \cdot 60 + 30 = 870$. Substituindo os coeficientes na fórmula temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-870)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3481}}{2} = \frac{1 \pm 59}{2}$$

Considerando que o resultado corresponde a medida do lado de um quadrado, temos que $x = 30$.

Como visto, os babilônios possuíam um método próprio e coerente para resolver problemas desse tipo, sem o uso de símbolos, que consistiam em “procedimentos geométricos aplicados a números considerados como grandezas geométricas” (ROQUE, 2014, p. 175).

Não é incomum que historiadores definam os procedimentos babilônicos como essencialmente algébricos e, de fato, há certa generalidade em seus métodos. Entretanto, devemos ter cautela com essa afirmação, principalmente porque os babilônios não faziam uso de símbolos.

> Se definíssemos álgebra como um conjunto de procedimentos que devem ser aplicados a entidades matemáticas abstratas, poderíamos até concluir que os babilônios realizavam uma álgebra de comprimentos, larguras e áreas. Mas, nesse caso, deveríamos ter o cuidado de definir a álgebra dos babilônios de um modo particular, e não por extensão do nosso conceito moderno de álgebra. (ROQUE, 2012, p. 71, 72).

Se nos basearmos em nossa definição moderna de álgebra, podemos acabar fazendo interpretações equivocadas dos procedimentos babilônicos, supondo um nível de abstração mais profundo do que o presente em seus escritos.

2.1.2. A matemática no Egito antigo

A engenharia de seus templos, os trabalhos de preservação dos mortos e suas inscrições, fizeram do Egito, por muito tempo, o mais rico campo de pesquisas históricas sobre a antiguidade. Muito do que se conhece da matemática egípcia provém de papiros que resistiram à ação do tempo, devido ao clima seco da região.

De acordo com Eves (2002, p. 67), ao contrário do que se pensa, a matemática no antigo Egito nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Segundo o autor, esse fato é consequência do desenvolvimento mais avançado da economia babilônica e o Egito ter se mantido em semi-isolamento. Isso, porém, não a torna menos significativa ou diminui sua contribuição para a história.

Os egípcios utilizavam de um sistema decimal aditivo, o que fazia da adição a operação mais importante para eles, e tinham conhecimentos aritméticos e geométricos.

Havia certo simbolismo em sua notação. No papiro de Rhind, o símbolo de *mais* corresponde a um par de pernas caminhando da esquerda para a direita — sentido da escrita egípcia —, enquanto que o de *menos* era representado por um par de pernas caminhando da direita para a esquerda — sentido contrário. Também eram empregados símbolos para a igualdade e para o valor desconhecido (EVES, 2002, p. 74).

Os papiros de Rhind e Moscou apresentam diversos problemas matemáticos que possibilitam a compreensão dos procedimentos egípcios. Porém, é no papiro de Berlim que encontramos um problema que corresponde a uma equação do segundo grau. O problema possui o seguinte enunciado: “uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1:$\frac{3}{4}$” (EVES, 2002, p. 74).

Consideremos um quadrado com lado x e outro com lado y. O problema pode ser escrito em termos modernos como $x^2 + y^2 = 100$, onde $y = \frac{3}{4}x$. Com isso, obtemos a equação do segundo grau incompleta $x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 100$, que nos dará $x = 8$, considerando que x é o lado de um quadrado e dever ser positivo. Consequentemente, teremos $y = 6$.

Não encontramos registros de como exatamente o problema era resolvido. Mesmo após a restauração, o papiro de Berlim continuou bastante danificado, o que provavelmente dificultou a tradução de todo seu conteúdo. Entretanto, uma análise dos relatos sobre a matemática egípcia nos levam a crer que, assim como era feito com as equações do primeiro grau, problemas desse tipo eram resolvidos pelo método da falsa-posição.

> A maioria dos relatos históricos sobre a matemática egípcia indica que se tratava de uma matemática essencialmente prática, baseada em métodos empíricos de tentativa e erro (como pode ser entendido o método da falsa-posição). (ROQUE, 2012, p. 81).

Note que esse método é puramente aritmético, uma vez que as operações realizadas envolvem quantidades conhecidas (números). Devido à escassez de fontes, não sabemos se os egípcios possuíam outros métodos ou a profundidade de seus estudos sobre essas equações. Contudo, além do caráter aritmético da resolução, consideramos conveniente ressaltar a natureza geométrica do enunciado.

2.1.3. Algumas proposições dos *Elementos*

A matemática grega é famosa por sua geometria axiomática e rigorosamente fundamentada em provas dedutivas, como pode ser visto nos *Elementos* de Euclides.

Nesta secção, trataremos de três proposições do livro II dos *Elementos* que, traduzidas em linguagem moderna, equivalem a algumas noções referentes às equações do segundo grau. Nosso objetivo não é demonstrar essas proposições, mas mostrar, por meio da tradução para linguagem simbólica moderna, as relações com o conceito atual das equações quadráticas.

O caráter dos *Elementos* é puramente geométrico e todas as suas proposições são demonstradas por figuras gerais, as quais não se associam dimensões ou medidas precisas. Ainda assim, no final do século XIX, matemáticos e historiadores defendiam que as proposições do livro II eram propriedades algébricas, camufladas pela geometria (ROQUE, 2012, p. 185).

Por isso, salientamos que as interpretações algébricas a seguir não provêm da obra de Euclides. Também não podemos afirmar que ele estudou as equações do segundo grau ou algo próximo disso, principalmente porque — ao contrário dos babilônios, que usavam de métodos geométricos para resolver problemas e encontrar um valor desconhecido — as proposições que serão apresentadas parecem ter por objetivo estabelecer igualdades geométricas de uma forma geral.

Ainda assim, consideramos essa breve análise importante para o presente trabalho. Primeiro porque a Geometria compõe a tríade dos campos da matemática aqui explorados. Além disso, essas proposições, bem como diversas outras do livro II, parecem ter surgido em um contexto em que era importante o estudo da "equivalência de áreas", tema este que abordaremos em algumas das atividades do próximo capítulo.

A seguir, serão apresentadas as proposições IV, V e VI do livro II, bem como uma representação em linguagem moderna.

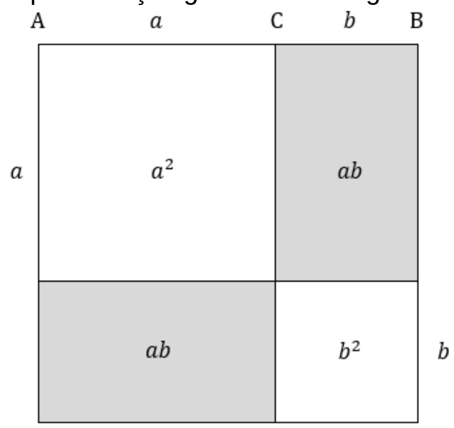
> Proposição IV: Se uma linha reta for dividida em duas partes num ponto arbitrário, o quadrado da linha inteira é igual aos quadrados das duas partes, e duas vezes o retângulo contido por essas partes. (EUCLIDES, 1838, p. 42).

Em linguagem moderna: seja o segmento AB cortado por um ponto C qualquer, que o divide em dois segmentos de medidas a e b. O quadrado do segmento AB (que mede $a + b$) é igual aos quadrados das partes (a e b) mais duas vezes o retângulo contido por essas partes. Ou seja:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

O que pode ser geometricamente conforme mostra a figura 8.

Figura 8 – Representação geométrica da igualdade algébrica



Fonte: Adaptado de EUCLIDES (1838, p. 42)

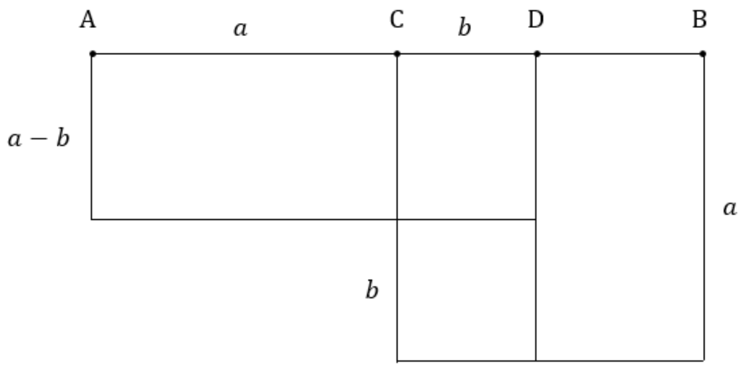
> Proposição V: Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e, também, duas partes desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado da linha entre as seções, é igual ao quadrado da metade da linha. (EUCLIDES, 1838, p. 42, 43).

Em linguagem moderna: seja o segmento AB cortado em um ponto C, que o divide em duas partes iguais (isto é, C é o ponto médio de AB), e em um ponto D que o divide em duas partes desiguais. O retângulo contido pelas partes desiguais (AD e DB), mais o quadrado da linha entre as seções (CD) é igual ao quadrado da metade da linha (AC = CB).

Tomemos AC = CB = a e CD = b. Consequentemente, temos DB = $a - b$. De acordo com a proposição, temos:

$$(a + b)(a - b) + b^2 = a^2 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Figura 9 – Representação geométrica da igualdade algébrica



Fonte: Adaptado de EUCLIDES (1838, p. 43)

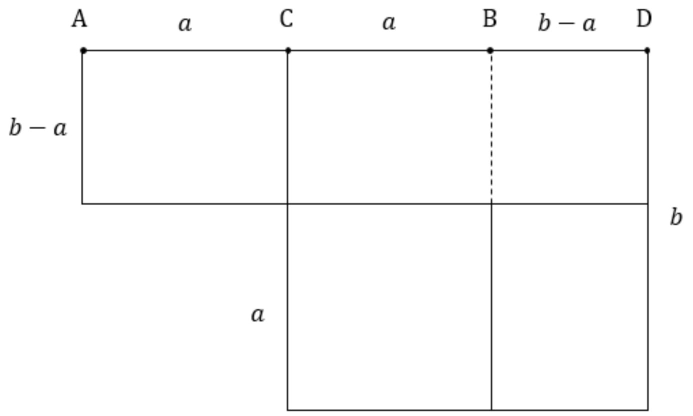
> Proposição VI: Se uma linha reta for dividida ao meio, e se lhe acrescentarmos outra linha, o retângulo contido por toda a linha produzida e a parte dela produzida, junto com o quadrado da linha cortada ao meio, é igual ao quadrado da linha composta pela metade e a parte acrescentada. (EUCLIDES, 1838, p. 43).

Em linguagem moderna: seja o segmento AB cortado em um ponto C, que o divide ao meio, e prolongado até um ponto D qualquer. O retângulo contido pelo segmento originado (AD) e a parte prolongada (BD), mais o quadrado da metade de AB, é igual ao quadrado do segmento formado pela metade de AB e a parte prolongada (isto é, o segmento CD).

Tomemos AC $= $ CB $= a$ e CD $= b$. Consequentemente, BD $= b - a$. Assim, temos:

$$(a+b)(b-a)+a^2=b^2 \Leftrightarrow (a+b)(b-a)=b^2-a^2$$

Figura 10 – Representação geométrica da igualdade algébrica



Fonte: Adaptado de EUCLIDES (1838, p. 44)

2.1.4. A *Aritmética* de Diofanto

Especula-se que Diofanto tenha vivido no século III E.C., mas isso é contestado, assim como sua possível origem grega. De seus três trabalhos, o mais famoso é a *Aritmética*, a qual conjectura-se que tenha sido composta por treze livros, embora apenas seis sejam conhecidos. A parte remanescente dessa obra consiste na resolução de 130 problemas, que levam a equações de primeiro e segundo grau, dentre outras (EVES, 2002, p. 207).

Como sugere o título, o livro trata da teoria dos números e aborda muitos conceitos que agora estão incluídos na álgebra (SMITH, 1958, p. 134). Sua contribuição mais conhecida é a introdução de uma representação para a quantidade desconhecida em um problema.

Quadro 3 – Representações para as quantidades desconhecidas dadas por Diofanto

Abreviações de Diofanto	Significado
ς	Última letra da palavra *arithmos,* a quantidade desconhecida
Δ^{Y}	Primeira letra de dynamis, quadrado da quantidade desconhecida
K^{Y}	Primeira letra de *kybos*, o cubo
$\Delta^{Y}\Delta$	Quadrado-quadrado (Quarta potência)
ΔK^{Y}	Quadrado-cubo, quinta potência
$K^{Y}K$	Cubo-cubo, sexta potência

Fonte: Adaptado de Roque (2012, p. 232).

Esse poderia ter sido um importante passo em direção à abstração, entretanto, como observado por alguns autores, as quantidades desconhecidas são abreviadas e não simbolizadas.

> Símbolos não são somente abreviações ou notações empregadas para facilitar a prática de procedimentos de cálculo e resolução de problemas; o simbolismo algébrico é um tipo de representação que conduz a abstrações que não estavam presentes na *Aritmética* de Diofanto. (ROQUE, 2012, p. 234).

Diofanto resolveu algumas equações do segundo grau, tanto determinadas, quanto indeterminadas. Vejamos três problemas do livro I da *Aritmética*, para os quais apresentaremos a solução dada por Diofanto mesclando suas abreviações com os símbolos operacionais atuais.

O primeiro problema tem por objetivo “encontrar dois números com soma e produto dados” (HEATH, 1885, p. 169). Considera-se a soma e o produto como 20 e 96, respectivamente.

Observe que a soma dos números é 20, logo, se eles fossem iguais, cada um deles seria 10 (pois $20 \div 2 = 10$). Entretanto, esses valores não satisfazem o produto $(\text{pois } 10 \cdot 10 = 100)$. Diofanto, então, supõe que a diferença entre os números seja 2ς, ou seja, os números procurados são $10 + \varsigma$ e $10 - \varsigma$. Então:

$$\begin{cases} 10 + \varsigma + 10 - \varsigma = 20 \\ (10 + \varsigma)(10 - \varsigma) = 96 \end{cases}$$

Do produto temos que $10^2 - \Delta^{Y} = 96$, logo $\varsigma = 2$. Portanto, os números procurados são 12 e 8.

O segundo problema é enunciado por: “encontrar dois números com soma e soma dos quadrados dados” (HEATH, 1885, p. 170). A soma é 20 e a soma dos quadrados é 208.

Como a soma é a mesma do problema anterior, repetiremos alguns dos princípios: supõe-se que a diferença entre os números é 2ς e, portanto, os números procurados são $10 + \varsigma$ e $10 - \varsigma$. Substituindo os valores na soma dos quadrados, temos:

$$(10 + \varsigma)^2 + (10 - \varsigma)^2 = 200 + 2\Delta^Y = 208 \Leftrightarrow \varsigma = 2$$

Assim, os números são 12 e 8.

O terceiro problema consiste em “encontrar dois números com diferença e produto dados” (HEATH, 1885, p. 170). A diferença dada é 4 e o produto 96.

Como a diferença entre os números é 4, podemos escrevê-los como $\varsigma + 2$ e $\varsigma - 2$. Do produto, $(\varsigma + 2)(\varsigma - 2) = \Delta^Y - 2^2 = 96$, concluímos que $\varsigma = 10$ e os números procurados são 12 e 8.

Note que os problemas tratam de dois valores desconhecidos, mas o método de Diofanto nos conduz a encontrar um terceiro valor, que nos fornecerá os dois primeiros.

Como explicamos anteriormente, mesclamos a simbologia de Diofanto com os símbolos operacionais atuais. Embora os procedimentos sejam relativamente os mesmos dos mostrados, seus métodos eram enunciados de forma retórica e suas abreviações serviam para simplificar a escrita, não para simbolizar. Por mais essa razão, não podemos afirmar que houvesse um simbolismo algébrico em sua obra.

Uma outra observação — que talvez não tenha ficado evidente, pois os resultados encontrados nos três problemas foram os mesmos — é que Diofanto apenas considerava resultados racionais positivos e uma única raiz, mesmo quando ambas eram positivas (SMITH, 1958, p. 134).

A obra de Diofanto foi uma importante ferramenta impulsionadora para o trabalho de diversos matemáticos europeus, dentre eles Viète, como veremos na secção 2.1.7.

2.1.5. A matemática hindu

Uma das mais conhecidas contribuições hindus para a matemática moderna é o sistema numérico indo-arábico — criado por eles e transmitido pelos árabes para a Europa Ocidental durante a Idade Média —, que é usado ainda nos dias de hoje. Os mais antigos registros desses símbolos numéricos encontram-se em colunas de pedras erguidas na Índia, por volta do ano 250 a.E.C. Nesses registros, o sistema posicional ainda não era usado e também não havia um símbolo para representar o zero, mas acredita-se que os mesmos tenham sido introduzidos por volta de 800 E.C., pois o árabe Al-Khwarizmi descreveu de maneira completa o sistema hindu num livro em 825 E.C. (EVES, 2002, p. 40).

A escassez de registros torna o desenvolvimento da matemática hindu na Antiguidade um mistério. Também não sabemos a influência de outras culturas sobre sua matemática, embora alguns de seus problemas pareçam ter inspiração na astronomia babilônica e grega (ROQUE, 2012, p. 237).

Entre os séculos V e XV, surgiram vários matemáticos notáveis, como Aryabhata, Brahmagupta, Mahavira e Bhaskara — conhecido historicamente como Bhaskara II.

As obras hindus eram escritas em versos e a linguagem era de difícil compreensão. Por isso, era natural que fossem complementadas com comentários feitos por outros matemáticos, explicando os procedimentos e elucidando seu significado (ROQUE, 2012, p. 238).

Em seus trabalhos, os hindus faziam uso de linguagem retórica, com algumas abreviações e símbolos, principalmente numéricos.

Quadro 4 – Representação das operações nas obras hindus

Operação	Representação
Adição	Era indicada por justaposição
Subtração	Colocava-se um ponto sobre o subtraendo
Multiplicação	Escrevia-se *bha* (primeira sílaba de *bhavita*, “produto”) depois dos fatores
Divisão	Escrevia-se o divisor debaixo do dividendo
Raiz quadrada	Escrevia-se *ka* (primeira sílaba de *karana*, irracional) antes da quantidade

Fonte: Adaptado de Eves (2002, p. 256).

Os hindus resolviam problemas que hoje exprimiríamos como equações do segundo grau pelo método de “completar quadrado”. Para compreendermos seus procedimentos, vejamos dois exemplos explicitando os métodos de Brahmagupta e Bhaskara.

Brahmagupta foi o mais importante matemático hindu do século VII. Em 628, ele escreveu o *Brahma-sphuta-sidd'hanta* ("o sistema de Brahma revisado"), cujo tema central é a astronomia e possui seis capítulos dedicados à matemática.

Além das abreviações citadas anteriormente, Brahmagupta denotava a quantidade desconhecida por $y\bar{a}$ (de yāvattāvat, "tanto quanto"); antes do número inteiro conhecido ele escrevia $r\bar{u}$ (de rūpa, "número puro"); e, quando em um problema havia mais de uma incógnita, para as quantidades desconhecidas adicionais ele usava as sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores (EVES, 2002, p. 256).

Uma das questões do décimo oitavo capítulo de seu livro conduz à resolução do problema $y\bar{a}\ v$ 1 $y\bar{a}$ $\dot{1}0$ $r\bar{u}$ $\dot{9}$, que hoje seria representado pela equação de segundo grau $x^2 - 10x = -9$.

Quadro 5 – O método de Brahmagupta

Solução dada por Brahmagupta	Em simbolismo atual	Solução em termos modernos aplicada a uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx = c$
O número absoluto $(\dot{9})$ é multiplicado por quatro vezes o [coeficiente do] quadrado $(\dot{3}6)$	$(-9) \cdot 4 = -36$	$4a \cdot c$
É adicionado o quadrado do [coeficiente do] termo médio (100) e extrai-se a raiz quadrada	$-36 + (-10)^2 = 64$	$4a \cdot c + b^2$
A raiz quadrada extraída (8) é diminuída pelo [coeficiente do] termo médio $(\dot{1}0)$	$8 - (-10) = 18$	$\sqrt{4ac + b^2} - b$
O resultado (18) dividido por duas vezes o [coeficiente do] quadrado (2) resulta no valor 9	$\frac{18}{2} = 9$	$\frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$

Fonte: Adaptado de Colebrooke (1817, p. 346, 347).

Os livros mais conhecidos de Bhaskara, que viveu no século XII, são o *Lilavati* e o *Bija Ganita* ("semente do cálculo"). Neste segundo, em particular, são descritos métodos para resolução de problemas envolvendo quantidades desconhecidas. Seguindo a tradição hindu, a obra é expressa em versos. Entretanto, as regras são ilustradas por exemplos e são comentadas pelo próprio autor (ROQUE, 2012, p. 239).

Vejamos, agora, a resolução de um exemplo do *Bija Ganita*, que atualmente seria denotado por $\frac{16}{9}x^2 + x + 2 = 2x^2$. Para esse exemplo, as etapas iniciais consistem em: eliminar o denominador das frações, multiplicando ambos os lados por

9; e igualar os termos com quantidades desconhecidas a um número conhecido. Obtemos, então, a equação equivalente $2x^2 - 9x = 18$.

O método de Bhaskara, em notação atual, está representado no quadro 6.

Quadro 6 – O método de Bhaskara em simbologia moderna

Aplicado a uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx = c$	Aplicado ao exemplo
Multiplicamos ambos os lados por $4a$: $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$	Multiplicando a equação por 8: $16x^2 - 72x = 144$
Adicionamos a ambos os lados b^2: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$	Adicionando 81: $16x^2 - 72x + 81 = 225$
Reescrevemos a igualdade como: $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$	Reescrevendo a igualdade: $(4x - 9)^2 = 15^2$
Tomamos a raiz quadrada em ambos os lados. Obtemos: $2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$ e $x = \frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$	Com isso, temos que: $4x - 9 = 15$ e $x = \frac{15+9}{4} = 6$

Fonte: Adaptado de Roque (2012, p. 241)

A segunda coluna do quadro 6 nos permite compreender as intenções por trás do procedimento de Bhaskara: ao transformar o primeiro termo em um quadrado perfeito, conseguimos eliminar o quadrado do valor desconhecido, transformando a igualdade em uma equação do primeiro grau.

Como mostrado, os métodos hindus, traduzidos em linguagem algébrica atual, equivalem aos procedimentos da nossa fórmula resolutiva de equações do segundo grau. Contudo, não podemos atribuir a eles a invenção dessa fórmula — nem mesmo a Bhaskara, como é feito no Brasil. A explicação para isso é bem simples: os hindus não simbolizavam seus coeficientes. Portanto, o nível de abstração de nossa fórmula não estava presente em sua matemática.

2.1.6. A álgebra árabe

Os árabes são conhecidos por seu papel na tradução das obras gregas e disseminação das mesmas. Essa, porém, é uma visão bastante limitada de sua contribuição para a matemática e autores mais recentes tem se preocupado em desconstruí-la. Mais do que apenas traduzir, os árabes expandiram os conhecimentos de geometria, trigonometria e astronomia tratados nas obras (ROQUE, 2012, p. 214), além de contribuírem de forma original. Ao sistematizarem os métodos para resolução de problemas, eles criaram um novo campo da Matemática, a Álgebra.

A origem do termo "álgebra" está em um dos mais importantes livros árabes da Idade Média: o *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala* (Hisab al-jabr w'al-muqabalah), escrito por Al-Khwarizmi. *Al-jabr* (álgebra) e *al-maqabala* são palavras árabes que representam operações usadas na resolução de equações e significam "restauração" e "balanceamento", respectivamente (ROQUE, 2012, p. 249).

Al-jabr seria o processo de adicionar termos iguais em ambos os lados da equação para eliminar os termos negativos; ou, ainda, multiplicar ambos os lados da equação pelo mesmo número para eliminar as frações. Já *al-muqabala* seria a redução de termos positivos, subtraindo quantidades iguais de ambos os lados da equação (WAERDEN, 1985, p. 4).

A linguagem usada por Al-Khwarizmi em sua obra era exclusivamente retórica, de forma que até os números eram escritos por extenso. Contudo, ele fazia uso de palavras específicas — as quais eram vistas como objetos matemáticos, desconectadas de qualquer concretude — para representar os termos das equações. As quantidades conhecidas eram chamadas *Adad.* A raiz, o valor desconhecido ao qual chamamos de *incógnita* ou *raiz*, era denominado *Jidhr* ou *Shay*. Já o quadrado era chamado *Mal* (ROQUE, 2014, p. 176). Assim, a equação que representamos atualmente por $x^2 = 2x + 3$, seria escrita na forma *dois Jidhr e três Adad igualam um Mal.*

Ele ainda classifica as equações em seis possíveis casos, com coeficientes e soluções positivas. São eles:

Quadro 7 – Classificação das equações por Al-Khwarizmi

Linguagem retórica de Al-Khwarizmi	Linguagem retórica atual:	Notação simbólica atual:
Mal igual a Jidhr	quadrados iguais a raízes	$ax^2 = bx$
Mal igual a Adad	quadrados iguais a um número	$ax^2 = c$
Jidhr igual a Adad	raízes iguais a um número	$bx = c$
Mal e Jidhr iguais a Adad	quadrados e raízes iguais a um número	$ax^2 + bx = c$
Mal e Adad iguais a Jidhr	quadrados e um número iguais a raízes	$ax^2 + c = bx$
Jidhr e Adad igual a Mal	raízes e um número iguais a um quadrado	$bx + c = ax^2$

Fonte: Corrêa (2009, p. 38)

Convém ressaltar que, por definição, o terceiro caso não caracteriza uma equação do segundo grau.

No primeiro capítulo do livro, Al-Khwarizmi trata os casos de quadrados iguais a raízes e, a partir dos exemplos e soluções dadas, é possível observar que ele não reconhece $x = 0$ como raiz. No capítulo II são abordados os quadrados iguais a números. No III é visto o caso das raízes iguais a um número. Já os capítulos IV, V e VI abrangem os diferentes casos de equações de segundo grau completas (BOYER, 1974, p. 168). São apresentados exemplos numéricos de cada um dos casos e os mesmos são resolvidos por meio de métodos generalizados.

> Para cada caso, enunciavam-se regras de solução e justificativas geométricas que deviam servir para qualquer exemplo dentro daquele caso. Logo, há uma preocupação com a generalidade, ainda que distinta da que conhecemos em nossa álgebra simbólica. (ROQUE, 2014, p. 177).

Para o quarto caso, um exemplo tratado por Al-Khwarizmi tem o seguinte enunciado: *um Mal e dez Jidhr igualam trinta e nove denares*. O mesmo pode ser escrito em notação simbólica atual como $x^2 + 10x = 39$. O algoritmo de resolução para problemas dentro desse caso está descrito no quadro 8.

Quadro 8 – O método de Al- Khwarizmi

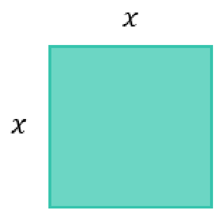
Solução dada por Al-Khwarizmi	Operações em linguagem simbólica moderna	Operações em linguagem simbólica moderna considerando uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx = c$
Tome a metade da quantidade de Jidhr	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplique esta quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some no resultado os Adad	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
Subtraia deste resultado a metade dos Jidhr, encontrando a solução	$8 - \frac{10}{2} = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Fonte: Roque (2012, p. 252).

Al-Khwarizmi ainda justifica geometricamente seus procedimentos.

A figura que ilustra esse problema é um quadrado de lado desconhecido, cuja medidas do lado (a raiz) você quer saber.

Figura 11 – Quadrado de lado desconhecido

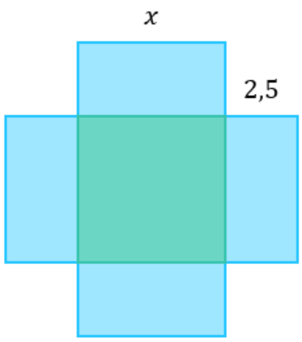


Fonte: Autoria própria

Se multiplicarmos um desses lados por qualquer número, o resultado representará um valor adicionado ao lado do quadrado. De acordo com o enunciado do problema, o lado foi multiplicado por 10, isto é, ao quadrado adicionamos 10 Jidhr. Como a raiz está ligada ao quadrado, podemos pegar $\frac{1}{4}$ de 10, que é igual a 2,5, e adicionarmos a cada um dos lados da figura. Assim, teremos quatro novos retângulos combinados ao quadrado original, formando uma figura de área igual a 39.

Note que faltam, nos cantos, quadrados de lado 2,5. Para completarmos o

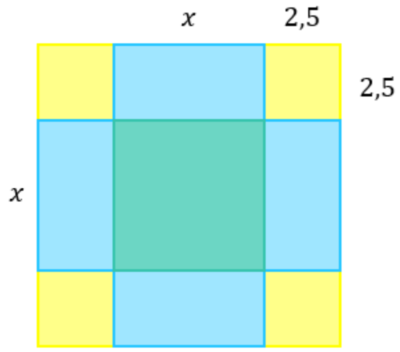
Figura 12 – Adicionando ao quadrado 10 Jidhr



Fonte: Autoria própria

quadrado, adicionaremos à figura quatro quadrados de área $2{,}5^2 = 6{,}25$.

Figura 13 – Completando o quadrado



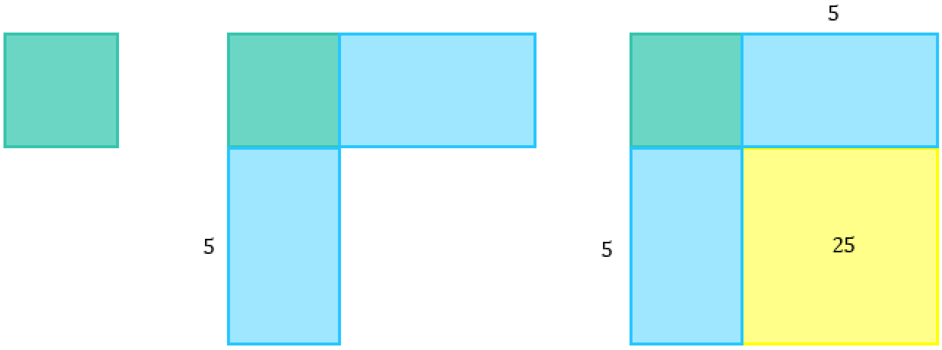
Fonte: Adaptado de Al-Khwarizmi (1831, p. 15)

Logo, a área adicionada à figura foi de $4 \cdot 6{,}25 = 25$ e o quadrado formado possui área $39 + 25 = 64$ e seu lado mede $\sqrt{64} = 8$. Portanto, o lado procurado mede $8 - 5 = 3$.

O mesmo pode ser explicado por outra figura. Assim como na figura anterior, primeiramente é construído um quadrado lado desconhecido. O passo seguinte consiste em adicionar os dez *Jidhr*. Para isso, dividimos o dez ao meio (obtendo 5) e construímos dois retângulos iguais cujos lados medem 5 e a raiz procurada. A figura obtida possui área 39 e, ao ser complementada com um quadrado de lado 5 (e, portanto, área 25) obtemos um quadrado de área $39 + 25 = 64$. O lado do quadrado mede 8 (pois $\sqrt{64} = 8$). Logo, a raiz procurada é $8 - 5 = 3$.

As "demonstrações" geométricas justificam a necessidade de se completar

Figura 14 – Justificativa geométrica de Al- Khwarizmi para os procedimentos adotados



Fonte: Autoria própria

quadrado e os demais procedimentos realizados, facilitando a compreensão.

> A exposição de Al-Khwarizmi era tão sistemática e completa que seus leitores não devem ter tido dificuldade para aprender as soluções. Nesse sentido, pois, Al-Khwarizmi merece ser chamado "o pai da álgebra" (BOYER, 1974, p. 168).

De fato, $x = 3$ é uma solução para o problema. Entretanto, a outra raiz, $x = -13$, não é mencionada por Al-Khwarizmi, uma vez as grandezas negativas não são consideradas por ele. Até mesmo os coeficientes negativos são "eliminados". A equação $x^2 = 10x - 21$, por exemplo, seria transformada em $x^2 + 21 = 10x$, por meio da operação *al-jabr*.

Um segundo problema é enunciado por *meio Mal e cinco Jidhr igualam vinte e oito Adad* $\left(\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28\right)$. Não nos ateremos à resolução desse problema — que é bastante semelhante ao anterior —, mas é interessante notar que o primeiro passo realizado por Al-Khwarizmi consiste em transformar o coeficiente do quadrado em 1. Para isso, ele multiplica ambos os lados da equação por 2, resultando na equação equivalente $x^2 + 10x = 56$ (um Mal e dez Jidhr igualam cinquenta e seis Adad).

Dessa forma, podemos concluir que haviam alguns dos requisitos para a aplicação dos métodos generalizados. Dentre esses requisitos, temos a necessidade de que todos os termos da equação sejam positivos e que o coeficiente do quadrado seja igual a 1.

2.1.7. A *Arte Analítica* de François Viète

Como visto anteriormente, os árabes foram responsáveis pela tradução de importantes obras gregas, que posteriormente foram traduzidas para o latim e se espalharam pela Europa. No século XVI, embora fosse uma importante ferramenta para a resolução de problemas, a Álgebra ainda não possuía o prestígio da Geometria, que era considerada uma ferramenta mais legítima (CORRÊA, 2009, p. 53). O predomínio da Geometria se deve ao fato de as obras gregas, como os *Elementos de Euclides*, seguirem uma organização axiomática-dedutiva, organização esta que não está presente nos trabalhos árabes.

A legitimação da Álgebra se deu a partir de 1591, com a publicação de *In Artem Analyticem Isagoge* ("Introdução à Arte Analítica"), de François Viète.

> [...] Viète procurou fazer da álgebra uma ciência nos moldes gregos, apresentando-a de maneira axiomática. Resolver equações algébricas por métodos algébricos servia como auxiliar na construção geométrica de soluções para os problemas geométricos. O objetivo de Viète era mostrar que a álgebra podia ser útil aos problemas de construção que tinham ocupado os gregos, uma vez que pretendia fundar uma nova álgebra com o mesmo prestígio da geometria (ROQUE, 2012, p. 299).

Essa obra foi fortemente influenciada pelo trabalho de Diofanto, pois as quantidades desconhecidas na *Aritmética* levaram Viète a crer que os gregos possuíam um método geral para a prática da análise[2], que havia se perdido (ROQUE, 2012, p. 298). Viète, inclusive, retoma alguns problemas presentes na obra de Diofanto.

> [...] não podemos afirmar que ele estava apenas estudando uma obra antiga com um novo olhar. Na verdade, ele pretendia mostrar que a sua arte analítica permitia que problemas antigos fossem resolvidos com toda a elegância e rigor que a Matemática exige (CORRÊA, 2009, p. 54).

A álgebra de Viète difere da árabe por se tratar de uma *logística speciosa*. Ele introduziu símbolos para representar as grandezas, fossem elas numéricas ou geométricas, com quantidades conhecidas ou desconhecidas. As incógnitas eram representadas por vogais e os coeficientes pelas consoantes, todas as letras maiúsculas. Essa notação permitiu, sobretudo, que os problemas fossem resolvidos de forma geral, ao invés de casos particulares.

---

[2] Baseado na *Coleção Matemática* de Pappus, Viète explica que a análise consiste em "pressupor aquilo que se busca como se estivesse concedido para chegar a uma verdade, por meio de consequências" (VIÈTE, 1983, p. 11).

Embora sua notação fosse moderna e simbólica em alguns aspectos, Viète também recorria à linguagem retórica, em especial para classificar as escalas e seus gêneros. O que atualmente denotamos por A^2 era escrito por ele como A quadratum; A^3 era A cubus; A^7 era A quadrato-quadrato-cubus. Apesar de clara, a notação se torna pouco prática conforme aumentamos o grau do termo.

Em sua obra, Viète organiza a Álgebra de forma axiomática, estabelecendo regras fundamentais das equações, proporções e das fases do seu método analítico.

O oitavo e último capítulo do livro é composto por 29 tópicos que definem o que é uma *equação* e os termos que a compõem. No segundo tópico, ele explica que uma equação é a comparação entre uma grandeza desconhecida e uma grandeza conhecida (VIÈTE, 1983, p. 29), e conclui o capítulo explicitando o objetivo de sua arte analítica: resolver todos os problemas.

Em seguida, Viète estuda uma série de problemas, aos quais ele chamou de *Zetéticas*, separados em cinco livros. Alguns problemas envolvem as equações do segundo grau. O quadro 9 contém o décimo problema do segundo livro.

Quadro 9 – Solução dada por Viète para o problema Zetéticas X.

Solução dada por Viète	Explicando os passos mesclando a simbologia atual com a de Viète
Dado um plano que consiste no produto dos lados dos retângulos e no quadrado dos lados individuais e dada, também, um dos lados, para encontrar o outro lado. Seja $\mathrm{B}\ plano$ consistindo na soma do produto dos lados e dos quadrados de cada um deles e, além disso, seja D um dos lados.	$ED + E^2 + D^2 = B$ Onde D,B são valores conhecidos e E é a raiz procurada. Atribuímos o símbolo E para a raiz procurada a fim de respeitar o simbolismo de Viète, onde as quantidades desconhecidas são representadas por vogais maiúsculas.
Seja A o lado procurado mais a metade do lado fornecido. O lado procurado será A menos $\mathrm{D}\frac{1}{2}$. E o quadrado é $\mathrm{A}\ quadrado$ menos $D\ in\ A$ mais $\mathrm{D}\ quadrado\ \frac{1}{4}$.	O termo in refere-se à multiplicação. Assim, $D\ in\ A$ seria atualmente denotado por $D \cdot A$ $A = E + \frac{1}{2}D$ $E = A - \frac{1}{2}D$ $E^2 = A^2 - DA + \frac{1}{4}D^2$

Solução dada por Viète	Explicando os passos mesclando a simbologia atual com a de Viète
Estes dois quadrados mais o produto dos lados são iguais a $\mathrm{B}\,plano$, de acordo com o que foi proposto. O produto dos lados é $D\,in\,A$ menos $\mathrm{D}\,quadrado\ \frac{1}{2}$.	Substituímos o valor atribuído a E (o lado desconhecido) na equação $A^2 - DA + \frac{1}{4}D^2 + D^2 + \left(A - \frac{1}{2}D\right) \cdot D = B$ $A^2 - DA + \frac{1}{4}D^2 + D^2 + DA - \frac{1}{2}D^2 = B$
Portanto, A quadrado mais $\mathrm{D}\,quadrado\ \frac{3}{4}$ é igual a B e, configurando como uma equação, temos: $\mathrm{A}\,quadrado$ igual a $\mathrm{B}\,plano$ menos $\mathrm{D}\,quadrado\ \frac{3}{4}$.	Simplificando a equação obtida anteriormente, temos: $A^2 + \frac{3}{4}D^2 = B$ $A^2 = B - \frac{3}{4}D^2$
Logo, a raiz quadrada de B menos $\mathrm{D}\,quadrado$ $\frac{3}{4}$, menos a metade do lado dado.	$A^2 = B - \frac{3}{4}D^2$, então $A = \sqrt{B - \frac{3}{4}D^2}$ $E = A - \frac{1}{2}D = \sqrt{B - \frac{3}{4}D^2} - \frac{1}{2}D$ Portanto $E = \sqrt{B - \frac{3}{4}D^2} - \frac{1}{2}D$
Seja $B\ plano$ 124 e D 2 Portanto $\sqrt{121} - 1$ é o lado necessário	$E = \sqrt{124 - \frac{3}{4}2^2} - \frac{1}{2}2 = \sqrt{121} - 1$
Seja $B\ plano$ 124 e D 10 Portanto $\sqrt{49} - 5$ é o lado necessário	$E = \sqrt{124 - \frac{3}{4}10^2} - \frac{1}{2}10 = \sqrt{49} - 5$

Fonte: Adaptado de Viète (1591).

No capítulo VIII de seu livro, Viète chama a quantidade desconhecida de uma equação de “raiz”. Entretanto, como vimos no exemplo anterior, ele faz uso do termo “lado do retângulo”, o que torna necessário que a solução seja positiva. Essa observação evidencia o que Corrêa (2009, p. 67) define como uma “fraqueza de sua álgebra”: ele não considerava grandezas negativas.

2.1.8. A *Geometria* de Descartes

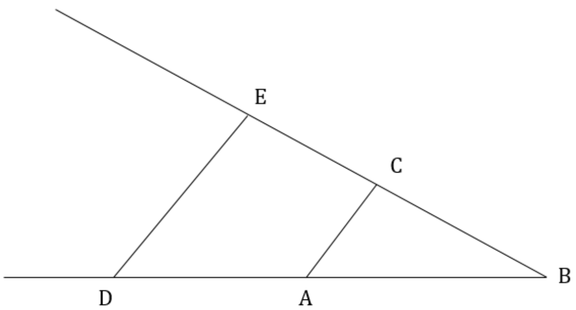
O matemático francês René Descartes — assim como Pierre Fermat — é frequentemente lembrado por sua contribuição para o processo de composição da Geometria Analítica que conhecemos nos dias de hoje.

O terceiro apêndice de uma de suas mais famosas obras, o *Discurso sobre o Método*, publicada em 1637, se chama *Geometria* e se divide em três partes. Já na primeira parte, nos deparamos com princípios geométricos que em muito superam a matemática grega.

Para os gregos, a variável representava o comprimento de um segmento. A multiplicação de duas variáveis representava a área de um retângulo; três variáveis multiplicadas representavam um paralelepípedo retângulo; e não iam além disso. Para Descartes, entretanto, a potência quadrada não era associada a uma área retangular, mas sim a um segmento de reta. Isso era possível considerando-se um segmento arbitrário como a “unidade” (EVES, 2002, p. 384).

Consideremos, por exemplo, o segmento de reta AB a unidade. Para multiplicar BD por BC, basta unirmos os pontos A e C e traçarmos DE paralelo a AC. Então BE será o produto (DESCARTES, 1954, p. 4).

Figura 15 – Representação geométrica do produto entre dois segmentos



Fonte: Adaptado de Descartes (1954, p. 4)

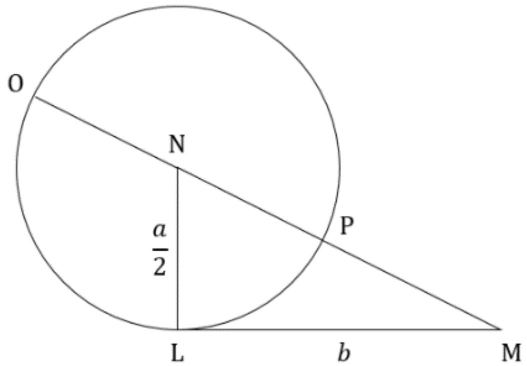
Para compreendermos porque BE é o produto, basta observarmos que AB $= 1$, logo, $\frac{\text{BE}}{\text{BD}} = \frac{\text{BC}}{1}$ e BE $=$ BD $\cdot$ BC.

O simbolismo algébrico de Descartes apresenta algumas novidades em relação ao de Viète. Ele representa a incógnita pelas últimas letras do alfabeto (w, x, y, z) e os coeficientes pelas letras iniciais.

Ele analisa alguns casos de equações do segundo grau e mostra a construção do segmento de reta que representa a raiz procurada.

Para o exemplo $z^2 = az + b^2$, constrói-se o triângulo retângulo NLM, com LM $=$ b e NL $= \frac{a}{2}$. Em seguida, é traçada a circunferência com raio $\frac{a}{2}$ e centro em N, que corta MN em P, e prolonga-se MN até O, tal que NO = NL. Assim, temos que OM = $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.

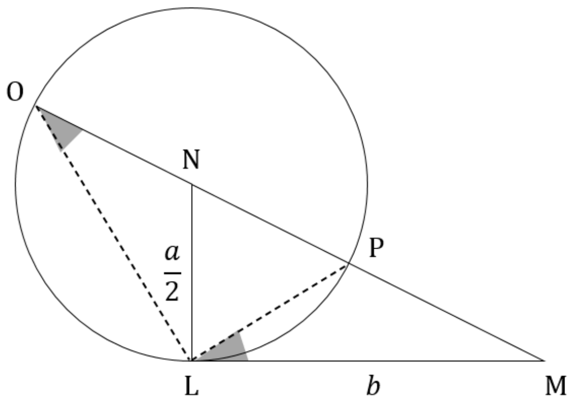
Figura 16 – Construção do segmento que representa a raiz



Fonte: Adaptado de Descartes (1954, p. 12)

Para compreendermos porque OM = z, tracemos os segmentos OL e LP.

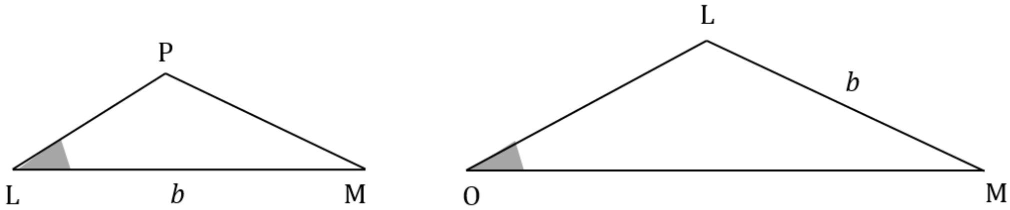
Figura 17 – Traçando OL e LP



Fonte: Adaptado de Roque (2012, p. 323)

Observe que $M\hat{L}P = L\hat{O}M$, pois determinam o mesmo arco na circunferência. Logo, os triângulos OLM e LPM são semelhantes (ROQUE, 2012, p. 324).

Figura 18 – Triângulos semelhantes



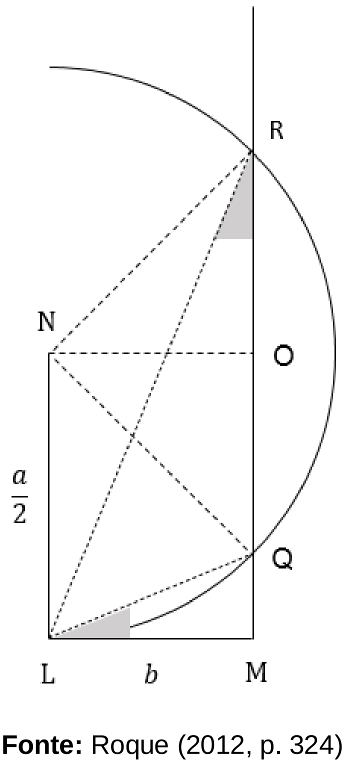
Fonte: Autoria própria

Assim, $\frac{\text{LM}}{\text{OM}} = \frac{\text{PM}}{\text{LM}} \Rightarrow \text{OM} \cdot \text{PM} = \text{LM}^2$. Chamando OM $= z$, temos que PM $= z - a$. Podemos, então, reescrever $\text{OM} \cdot \text{PM} = \text{LM}^2$ como $z(z-a) = b^2$ ou $z^2 = az + b^2$ (ROQUE, 2012, p. 324).

O mesmo triângulo retângulo NLM do exemplo anterior era usado para obter a raiz da equação $y^2 = -ay + b^2$. Dessa vez, porém, a raiz procurada é representada pelo segmento PM, de forma que PM $= y = \frac{-a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$. Como PM $= y$, teremos OM $= a + y$. Substituindo os termos na igualdade $\text{OM} \cdot \text{PM} = \text{LM}^2$, temos $(a+y)y = b^2$ ou $y^2 = -ay + b^2$.

Para a equação $z^2 = az - b^2$, Descartes constrói o segmento NL $= \frac{a}{2}$ e LM $= b$, como no exemplo anterior, e traça a reta MR paralela à NL. Em seguida, é traçada a circunferência de centro N e raio NL, que corta MR em Q e R. Assim, temos que a raiz procurada é MR ou MQ.

Figura 19 – Construção dos segmentos que representam as raízes

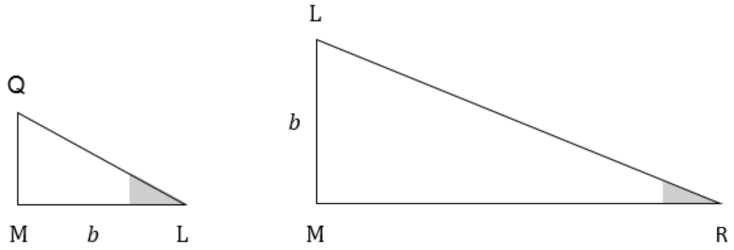


Fonte: Roque (2012, p. 324)

Para vermos que os segmentos satisfazem à equação, observemos que $Q\hat{L}M = L\hat{R}M$, pois determinam o mesmo arco na circunferência. Logo, os triângulos retângulos

LRM e QLM são semelhantes. Assim, temos $\frac{\text{LM}}{\text{MR}} = \frac{\text{MQ}}{\text{LM}}$ e $\text{LM}^2 = \text{MR} \cdot \text{MQ}$ (ROQUE, 2012, p. 325).

Figura 20 – Triângulos semelhantes



Fonte: Autoria própria

Tomemos, primeiramente, $\text{MR} = z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, então $\text{LM}^2 = \text{z} \cdot \text{MQ}$.

Note que $\text{NQ} = \text{NR} = \frac{a}{2}$, pois são raios da circunferência de centro em N; $\text{NO} = \text{LM} = b$; e $\text{RO} = \text{OQ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, pois são catetos correspondentes dos triângulos retângulos NOQ e NOR, que são congruentes.

Temos que $\text{MQ} = z - \text{RQ}$ e $\text{RQ} = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = 2\left(z - \frac{a}{2}\right)$. Logo $\text{MQ} = z - 2\left(z - \frac{a}{2}\right) = a - z$. Substituindo os valores de LM, MR e MQ na igualdade $\text{LM}^2 = \text{MR} \cdot \text{MQ}$, temos $b^2 = z(a - z)$ ou $z^2 = az - b^2$ (ROQUE, 2012, p. 325).

Para $\text{MQ} = z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$ teremos $\text{MR} = z + \text{RQ}$, onde $\text{RQ} = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = -2\left(z - \frac{a}{2}\right)$. Então $\text{MR} = z - 2\left(z - \frac{a}{2}\right) = a - z$. Assim, a igualdade $\text{LM}^2 = \text{MR} \cdot \text{MQ}$ pode ser reescrita como $b^2 = z(a - z)$ ou $z^2 = az - b^2$.

Descartes observa que se a circunferência não tocar o a reta MQR em nenhum ponto, a construção do problema é impossível (DESCARTES, 1954, p. 15).

Como representava as raízes por segmentos de reta, ele não considerava os resultados negativos. Para o terceiro caso apresentado, são determinadas duas raízes pois ambas são positivas.

Ainda que os problemas fossem resolvidos por uma construção geométrica, o método de Descartes era inovador na geometria. Ao operar com as grandezas como se fossem números, ele proporcionou a mistura de gêneros tidos como distintos: a aritmética e a geometria (ROQUE, 2012, p. 323). Observamos, ainda, sua notação algébrica, que permite generalizar seus métodos.

CAPÍTULO 3. ENSINANDO EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesse capítulo, apresentaremos uma proposta de sequência didática que visa o ensino de equações do segundo grau integrando diferentes campos da matemática: a Aritmética, a Geometria e a Álgebra. A sequência tem por objetivo geral romper com os moldes tradicionais de teoria-exemplos-exercícios de fixação, propiciando a construção do conhecimento por meio do desenvolvimento gradual do conteúdo e dos procedimentos. Para isso, introduziremos o conteúdo por meio da utilização de conceitos geométricos para, aos poucos, adquirirmos a generalização e o caráter algébrico desejado. Além disso, exploraremos formas variadas de resolução.

Como dissemos no segundo capítulo, o primeiro contato dos alunos com as equações do segundo grau acontece no 8° ano escolar, com o estudo das equações incompletas do tipo $ax^2 = b$. Entretanto, é a partir do ano seguinte que esses estudos são realmente aprofundados. Por isso, a sequência proposta terá como público alvo alunos do 9° ano.

3.1. Algumas Considerações

Antes de apresentarmos as atividades que compõem a sequência didática, faremos algumas considerações a respeito de nossa abordagem metodológica e justificaremos alguns de nossos métodos.

3.1.1. A importância da aritmética, da geometria e da álgebra para a sequência didática

Sendo as equações do segundo grau constituintes do campo da Álgebra, não seria incomum questionar o porquê de promover seu ensino incluindo a Aritmética e a Geometria. Já discutimos, no primeiro capítulo, a importância de cada um dos três campos e do ensino intradisciplinar. Trataremos agora desses aspectos no ensino das equações do segundo grau.

No capítulo anterior, vimos alguns dos momentos que compõem a história dessas equações. Do ponto de vista histórico, houve forte presença dos campos citados na evolução do tratamento das equações do segundo grau, até o ponto como hoje as conhecemos.

Os enunciados dos problemas babilônicos possuíam caráter geométrico e, embora não fizessem uso de símbolos para representar a quantidade desconhecida, havia certa generalidade em seus métodos. Os métodos egípcios, de tentativa e erro, eram aritméticos. Euclides, ainda que não tenha estudado diretamente as equações do segundo grau, provou igualdades de áreas geométricas que, traduzidas em linguagem moderna, representam identidades algébricas. Diofanto resolveu equações com duas incógnitas transformando-as em equações do segundo grau com uma incógnita, por meio de procedimentos aritméticos. Os hindus resolviam seus problemas pelo método de "completar quadrado". Al-Khwarizmi fazia uso de construções geométricas para justificar seus métodos algébricos. Viète preocupou-se em desenvolver métodos gerais para que pudesse resolver todo tipo de problema. Por fim, temos Descartes, com seus procedimentos que reuniam os três campos.

Cada campo possui sua devida importância na sequência didática que será apresentada. A Aritmética é composta por noções fundamentais da matemática, como contar, ordenar, quantificar e operar com os números, assim, seu papel será fundamental. Partiremos dos números, para chegarmos à abstração da Álgebra e formalização dos conceitos. Trabalharemos, também, conceitos e propriedades geométricas, explorando os aspectos visuais proporcionados por esse campo.

> Nessa integração, a presença de figuras exerce importante papel na aprendizagem matemática, porque elas possibilitam aos alunos a visualização do todo, bem como das partes que o compõe e, assim, facilita o desenvolvimento da habilidade mental de operar com as partes sem perder de vista o todo. (LORENZATO, 2006, p. 70).

Não estamos, porém, reduzindo a geometria aos seus aspectos visuais. Tampouco estamos afirmando que seu uso facilita a compreensão. Assim, seremos cautelosos no uso que faremos para facilitar o processo de entendimento.

3.1.2. A História da Matemática

Muito se tem comentado sobre o potencial da História da Matemática como um recurso para o ensino-aprendizagem dessa área de conhecimento, como pode ser visto nos trabalhos de Miguel (1993), Furinghetti (1997), Gutierre (2001) e Miguel e Miorim (2004). Os debates que cercam seu uso podem reforçar ou colocar em dúvida sua eficácia metodológica. Ambos os argumentos são importantes, uma vez que possibilitam conhecermos suas potencialidades, mas sem criarmos a ideia fantasiosa de que a história resolveria os muitos problemas no ensino-aprendizagem de matemática.

Basearemos algumas atividades de nossa sequência didática em problemas vistos no capítulo anterior. Isso não quer dizer que queremos que os alunos aprendam cada nome, método, símbolo ou notação presente na história, mas sim mostrar — dentro de nossa notação e simbologia atual — um contexto para o surgimento dessas práticas e cálculos.

Para Vergnaud (1993, p. 1), "é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança". Dessa forma, ao ressaltar o papel das situações (ou contextos) na construção de um conhecimento por parte do aluno, compreendemos que o autor vê na contextualização a possibilidade de tornar a aprendizagem mais significativa.

O uso da História da Matemática para a contextualização justifica-se no fato de que ela pode servir de elemento motivador, na medida em que sugere que a matemática é uma criação humana, refletindo diferentes preocupações em culturas distintas, podendo ensejar comparações entre o conhecimento atual e aquele de diferentes épocas.

3.1.3. O uso do material didático

Em algumas das atividades será sugerido o uso de materiais didáticos. Lorenzato (2009, p. 18), define material didático (MD) como qualquer instrumento que possa ser útil ao processo de ensino-aprendizagem (um giz, calculadora, filme, livro, jogo, caneta, quadro, entre outros).

Com o uso do material, pretendemos proporcionar a experimentação, a manipulação e construção de percepções, pelos alunos, por conta própria. Aqui reforçamos o papel do professor, que será um agente facilitador da construção do conhecimento, que não lhes entregará as respostas prontas, mas sim os auxiliará em seu processo de aprendizagem, auxiliará na discussão dos diferentes resultados, sejam eles certos ou errados, fazendo do erro uma possibilidade de aprendizagem. É importante a manipulação de materiais didáticos por parte dos alunos, pois isso pode permitir que eles cheguem a suas próprias conclusões.

> Assim, por exemplo, para um mesmo MD, há uma diferença pedagógica entre a aula em que o professor apresenta oralmente o assunto, ilustrando-o com um MD, e a aula em que os alunos manuseiam esse MD. O MD é o mesmo, mas os resultados do segundo tipo de aula serão mais benéficos à formação dos alunos porque, de posse do MD, as observações e reflexões deles serão mais profícuas, uma vez que poderão, em ritmos próprios, realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durante suas atividades. (LORENZATO, 2009, p. 27).

Ressaltamos que o material é uma ferramenta auxiliadora e não objeto de aprendizagem pura. Isto é, os alunos não aprenderão só com ele, é necessário contextualizar, mostrar como usar, organizar os passos, sistematizar, dar instruções. Quando apenas damos o material aos alunos, não necessariamente eles farão um bom uso ou entenderão como funciona. Além disso, é necessária a reflexão do aluno sobre os processos que está efetuando com o material.

Não seremos ingênuos atribuindo um valor quase que mágico ao uso de um material. Nem sempre ele funcionará e existem diversos fatores que podem gerar esse insucesso. Também não ocultaremos o fato de que é mais fácil dar aula sem ele. Existem questões que podem dificultar para o professor a aplicação de uma atividade com material didático, como o currículo escolar e o pouco tempo de aula. Entretanto, o que devemos questionar não é o que é mais fácil para o professor, mas sim o que é mais útil à aprendizagem do aluno. As observações, constatações e descobertas feitas por eles, quando conduzidos ao uso correto do material, são produtivas.

3.1.4. O trabalho em grupo

Uma das características de nossa sequência didática é a sugestão de que as atividades sejam trabalhadas com a turma dividida em grupos de até quatro alunos. A socialização dos alunos em sala de aula é natural e queremos explorar positivamente essas interações, proporcionando discussões sobre as atividades.

> Trabalhando em pequenos grupos, os alunos têm potencial para dar explicações compreensivas e oportunas. Ao tentar resolver o problema pela primeira vez, podem compreender melhor do que o professor o que seus homólogos não compreendem. Além disso, uma vez que os alunos compartem uma linguagem semelhante, podem traduzir vocabulário difícil e expressões e, assim, utilizar uma linguagem que seus colegas podem entender (SILVA, 1998, p. 139).

É importante que o professor transite entre os grupos, observando os procedimentos adotados, solucionando dúvidas e incentivando a participação de todos os integrantes.

3.1.5. Conhecimentos prévios

Para a realização das atividades, serão necessários alguns conhecimentos prévios por parte dos alunos, conhecimentos estes que se supõe terem aprendido em séries anteriores. Dentre eles, destacamos:

- conhecer as operações aritméticas;
- reconhecer figuras planas;
- saber calcular áreas e o método de decomposição;
- saber equivalência de áreas;
- conhecer a linguagem matemática;
- conhecer unidades de medida.

3.2. A Sequência Didática

A sequência didática será composta por sete atividades, as quais estão sintetizadas no quadro 10 e totalizam 13 horas/aulas.

Quadro 10 – Síntese das atividades da sequência didática

Atividades	Título	Objetivos	Duração
1	Nivelando conhecimentos	Relembrar o cálculo de áreas e perímetro de figuras planas, a igualdade entre áreas e o processo de decomposição de figuras para nivelar os conhecimentos dos alunos.	1 hora/aula
2	Introdução às equações do segundo grau	Introduzir os conceitos iniciais sobre as equações do segundo grau: definição, fórmula genérica e a diferença entre coeficientes e incógnita.	2 horas/aulas
3	Trinômios quadrados perfeitos	Possibilitar a compreensão dos trinômios quadrados perfeitos por meio do cálculo da área de quadrados, estabelecendo relações entre a área do todo e da soma de suas partes.	2 horas/aulas

Atividades	Título	Objetivos	Duração
4	Completando quadrado	Proporcionar a compreensão do método de completar quadrado por meio de procedimentos geométricos e algébricos.	2 horas/aulas
5	Apresentando a fórmula resolutiva	“Construir” a fórmula resolutiva a partir dos métodos de resolução utilizados em atividades anteriores.	2 horas/aulas
6	Soma e produto de raízes	Estabelecer as relações da soma e do produto das raízes da equação com os coeficientes a, b e c	2 horas/aulas
7	Problemas	Mostrar aplicações para as equações do segundo grau e exercitar a capacidade de interpretar o que é pedido, transitando entre a língua materna e a linguagem matemática.	2 horas/aulas

Fonte: Autoria própria.

3.2.1. Atividade 1: nivelando conhecimentos

Como dissemos, para melhor compreensão das atividades por parte dos alunos, são necessários alguns conhecimentos prévios. Embora esses conhecimentos devam ser obtidos e aprimorados em anos anteriores, não há garantias de que o aluno se lembre ou, ainda, os tenha aprendido. Assim, a primeira atividade tem por objetivo relembrar o cálculo de áreas e perímetro de figuras planas, a igualdade entre áreas e o processo de decomposição de figuras, a fim de nivelar os conhecimentos dos alunos e evitar que alguns deles sejam “deixados para trás” no decorrer das atividades.

Para a realização dessa atividade, sugere-se a divisão da turma em grupos de três a quatro alunos e cada um dos grupos receberá um *kit* contendo 25 quadrados de mesma medida, os quais serão definidos como unitários (que podem ser confeccionados em EVA, papel cartão ou outro material que possa ser manipulado e não se degrade rapidamente), e uma folha com os exercícios.

A atividade é composta pelos seguintes exercícios:

1) *Utilizando as peças que recebeu, construa os quadriláteros pedidos e preencha a tabela com as informações pedidas:*
   a) *Quadrado de lado 2;*

b) Retângulo de lados 1 e 4;

c) Quadrado de lado 4;

d) Retângulo de lados 2 e 8;

e) Quadrado de área 9;

f) Retângulo de área 12;

g) Quadrado de perímetro 20;

h) Retângulo de perímetro 20;

Tabela 1 – Tabela a ser preenchida pelos alunos na 1ª questão da Atividade 1

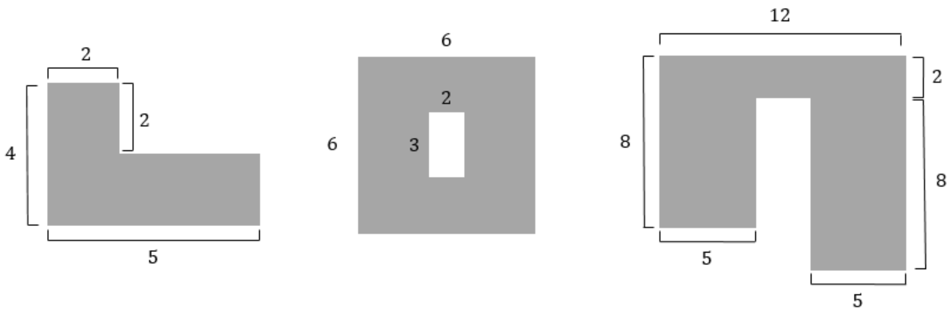
	Base	Altura	Número de peças	Área	Perímetro
a)					
b)					
c)					
d)					
e)					
f)					
g)					
h)					

Fonte: Autoria própria.

2) Qual a relação entre a área e o número de peças?

3) Calcule a área dos polígonos abaixo:

Figura 21 – Polígonos referentes à 3ª questão da Atividade 1

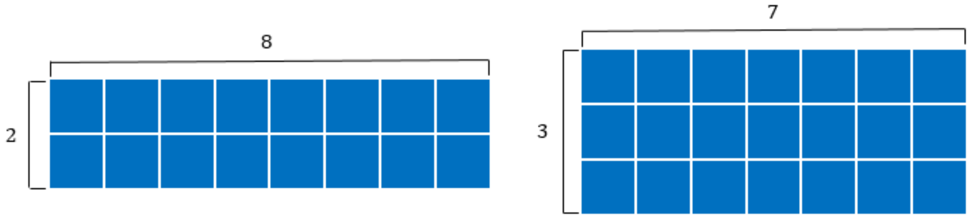


Fonte: Autoria própria

Antes de os alunos darem início à atividade, o professor deve explicar que as peças se tratam de quadrados unitários, isto é, cujo lado mede 1 e, portanto, a área também mede 1. Além disso, devem ser relembradas as características fundamentais dos lados e ângulos dos quadrados e dos retângulos.

Na primeira questão, usando os quadrados unitários, os alunos devem montar os quadriláteros pedidos e preencher a tabela registrando a medida de sua base, a medida de sua altura, o número de peças utilizadas em sua composição, sua área e seu perímetro. No caso dos retângulos, os resultados nas tabelas podem variar nas colunas da *base* e da *altura*. Para o retângulo de perímetro 20, por exemplo, diversas são as representações possíveis. A figura 22 mostra dois retângulos, de bases e alturas distintas, que possuem esse perímetro.

Figura 22 – Retângulos de bases e alturas distintas, que possuem perímetro 20



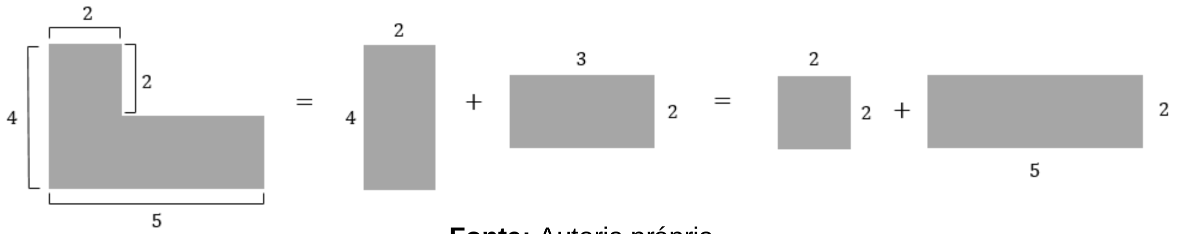
Fonte: Autoria própria

O professor deve chamar a atenção dos alunos para a possibilidade de quadriláteros distintos terem áreas iguais.

Com a segunda questão, espera-se que os alunos observem que o número de peças usadas na construção das figuras é o mesmo da área. O professor deve instigar a turma sobre o porquê de isso ter acontecido e explicar a razão: os quadriláteros formados resultam da união de quadrados de área 1. Assim, a área de uma figura pode ser calculada a partir da soma da área das partes que a compõem.

Fazemos uso dessa propriedade na terceira questão, na qual os alunos devem calcular as áreas das figuras por meio de sua decomposição. A figura 23 apresenta duas decomposições possíveis para o primeiro polígono.

Figura 23 – Decomposição do polígono



Fonte: Autoria própria

É importante ressaltar que embora as questões envolvam, principalmente, o pensamento geométrico, o pensamento aritmético também está presente e é importante ferramenta para o desenvolvimento das mesmas, uma vez que a área e o perímetro dos polígonos são obtidos a partir de operações aritméticas.

3.2.2. Atividade 2: introdução às equações do segundo grau

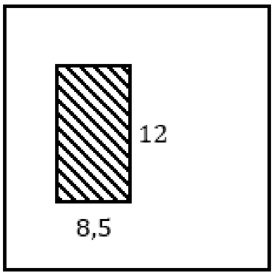
Nessa atividade, dividida em duas partes, introduziremos as equações do segundo grau. A atividade consiste na resolução de seis questões, três em cada parte, e deve ser finalizada com a caracterização e formalização dos conceitos. Recomendamos que seja desenvolvida em duplas, para que os alunos debatam entre si estratégias de resolução. Cada dupla deve receber uma folha com os exercícios propostos.

Faremos a introdução do conteúdo por meio de questões que recorrem ao uso da geometria. Justificamos essa abordagem no fato de que, em diversos momentos de sua evolução histórica, as equações do segundo grau apareceram intimamente relacionadas ao cálculo de áreas retangulares, de forma que uma das possíveis razões para seu surgimento e desenvolvimento está ligada à abordagem geométrica. O próprio termo “equação *quadrática*” sugere essa relação, bem como os termos dos procedimentos de elevar “ao quadrado” — quando se multiplica o número por si próprio, o que seria o equivalente a calcular a área de um quadrado — e extrair a “raiz quadrada” — do latim, *radix quadratum*, “lado do quadrado”, que seria encontrar o lado do quadrado que possui aquela área —, envolvidos no estudo dessas equações.

A primeira parte é composta pelas seguintes questões:

1) *Quanto mede o lado de um quadrado que tem 121 cm² de área?*
2) *Em um terreno quadrado foi construída uma casa retangular de 8,5m por 12m. Sabendo que a área livre restante tem 298 m², quanto mede a área total do terreno? Qual a medida dos lados do terreno?*

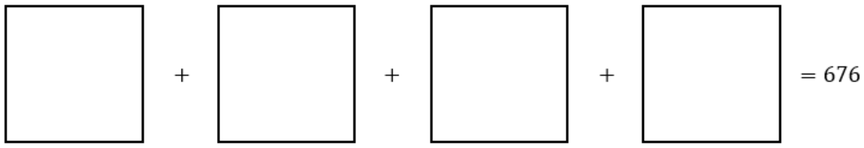
Figura 24 – Representação geométrica referente à 2ª questão da Atividade 2



Fonte: Autoria própria

3) *Somei a área de quatro quadrados iguais e obtive 676 cm². Qual a medida dos lados desses quadrados?*

Figura 25 – Representação geométrica referente à 3ª questão da Atividade 2



Fonte: Autoria própria

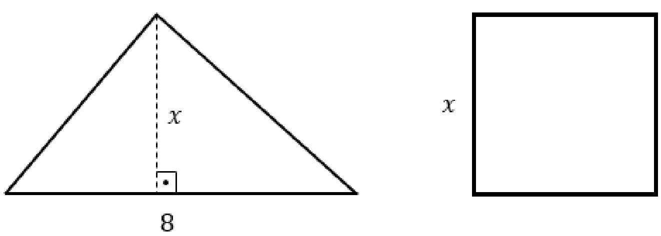
Nessa etapa, os alunos devem resolver livremente as questões, utilizando seus próprios métodos e reflexões. O professor não deve exigir nem influenciar o uso de notações e manipulações algébricas, isso porque as questões podem ser resolvidas a partir das operações aritméticas de soma, multiplicação, divisão e extração de raízes. A terceira questão, por exemplo, pode ser resolvida por meio da percepção de que se quatro quadrados iguais possuem, juntos, área 676, então cada um deles possui área $\frac{676}{4} = 144$ e que, portanto, o lado de cada um deles mede $\sqrt{144} = 12$.

Ao fim dessa etapa, os alunos devem ser questionados sobre seus procedimentos e o raciocínio por trás dos mesmos. Após a discussão dos resultados, o professor deve expor a resolução algébrica — sem desconsiderar as respostas dos alunos — e, então, introduzir as equações do segundo grau do tipo $ax^2 = c$.

Na segunda parte da atividade serão trabalhadas as equações do tipo $ax^2 = bx$, sendo composta pelas seguintes questões:

4) *Um número elevado ao quadrado é igual ao seu triplo. Que número é esse?*
5) *Sabendo que o triângulo de base 8 e altura x e o quadrado de lado x possuem a mesma área, calcule o lado do quadrado.*

Figura 26 – Representação geométrica referente à 5ª questão da Atividade 2



Fonte: Autoria própria

6) *Um trapézio e um retângulo possuem a mesma altura e a mesma área. Sabendo que a base do retângulo é 4 vezes maior que sua altura, e as bases do trapézio medem 3 e 7, determine a altura e a área de cada um dos quadriláteros.*

Ao contrário da etapa anterior — onde primeiro os alunos resolvem as questões e só depois os conceitos são formalizados —, a segunda parte deve ser iniciada com o professor resolvendo a quarta questão juntamente com os alunos. Isso porque mesmo que os alunos consigam representar algebricamente os problemas, não necessariamente conseguirão resolvê-los.

Observe que para obtermos a solução para a questão 1, basta extrairmos a raiz quadrada de 121. Podemos escrever e solucionar esse problema, algebricamente, da seguinte forma:

$$x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm\sqrt{121} = \pm 11$$

Caso o aluno utilize do mesmo método na questão 4, ele obterá $x^2 = 3x$ e $x = \sqrt{3x}$ e, provavelmente, não saberá o que fazer em seguida. Assim, consideramos interessante que esse caso seja introduzido a partir da discussão com os alunos das possibilidades para resolução.

Em ambos os casos, o professor deve explicar a possibilidade de existirem até duas soluções e incentivar os alunos a verificarem as soluções, isto é, substituir o(s) valor(es) de x na equação e verificar se a igualdade é satisfeita.

As questões seguintes devem ser resolvidas pelas duplas e depois comentadas pelo professor em conjunto com a turma. A questão 6 propositalmente não contém a representação geométrica do problema proposto. Isso porque se espera que os alunos leiam o problema, compreendam-no e, caso sintam necessidade, façam suas próprias representações geométricas e algébricas, a partir dos conhecimentos obtidos.

Nessa segunda parte, a simbologia algébrica está mais presente e se torna parte fundamental.

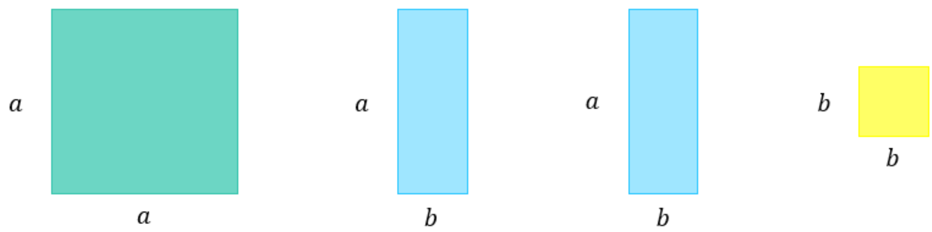
Por último, o professor deve caracterizar as equações do segundo grau, exibindo sua forma genérica: $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são os coeficientes reais, com $a \neq 0$. É importante que o professor explique a diferença entre os coeficientes e a incógnita e que os casos vistos anteriormente são obtidos quando se tem $b = 0$ ou $c = 0$. O professor pode, ainda, pedir que os alunos retornem aos exercícios e identifiquem os coeficientes.

Mais do que as respostas dadas pelos grupos, o professor deve avaliar o desenvolvimento individual dos alunos e se os mesmos estão associando o conteúdo e adquirindo as percepções e conhecimentos necessários para dar prosseguimento às atividades. Se necessário, mais exemplos devem ser propostos para garantir a compreensão.

3.2.3. Atividade 3: trinômios quadrados perfeitos

Na terceira atividade serão estudados os trinômios quadrados perfeitos. Recomendamos a divisão da turma em grupos de três a quatro alunos. Cada grupo deverá receber um kit com 4 peças — dois quadrados distintos e dois retângulos iguais nos quais cada lado possui a mesma medida dos lados dos quadrados (figura 27) — e uma folha com as questões.

Figura 27 – Representação das peças que compõem o material da Atividade 3



Fonte: Autoria própria

A atividade tem por objetivo possibilitar a compreensão do conteúdo por meio do cálculo da área de quadrados, estabelecendo relações entre a área do todo e da soma de suas partes.

Assim como na atividade anterior, utilizaremos o recurso à geometria, devido à presença desse campo no desenvolvimento desses estudos no decorrer da história. Isso pode ser visto, por exemplo, nos *Elementos* de Euclides onde, ainda que o autor não faça uso de notação algébrica, podemos encontrar demonstrações geométricas para os trinômios quadrados perfeitos — que provam a igualdade entre áreas retangulares.

O professor deve iniciar a atividade pedindo que os alunos manipulem o material e fazer, junto com eles, observações e constatações sobre as relações existentes entre as peças. Ao fim desse debate, os alunos devem compreender que os retângulos são iguais e a medida do lado maior é igual ao lado do quadrado maior; e a medida do lado menor é igual ao lado do quadrado menor.

Em seguida, os grupos devem resolver às seguintes questões:

1) Utilizando as 4 peças que recebeu, monte um quadrado.

2) Calcule as áreas pedidas e preencha a tabela:

a) Se o quadrado maior tiver lado 7 e o quadrado menor tiver lado 3, qual será a área dos quadrados e dos retângulos?

b) Se o quadrado maior tiver lado 2 e o quadrado menor tiver lado 8, qual será a área dos quadrados e dos retângulos?

c) Se o quadrado maior tiver lado 13 e o quadrado menor lado g, qual será a área deles e dos retângulos?

d) Se o quadrado maior tiver lado x e o quadrado menor lado 2, qual será a área deles e dos retângulos?

e) Se o quadrado maior tiver lado z e o quadrado menor lado z – 4, qual será a área deles e dos retângulos?

f) Se o quadrado maior tiver lado a e o quadrado menor lado b, qual será a área deles e dos retângulos?

Tabela 2 – Tabela a ser preenchida pelos alunos na 2ª questão da Atividade 3

	Área do quadrado maior	Área do quadrado menor	Área do retângulo 1	Área do retângulo 2
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				

Fonte: Autoria própria.

3) Supondo os valores da questão anterior para os lados do quadrado maior e do quadrado menor, preencha a tabela.

Tabela 3 – Tabela a ser preenchida pelos alunos na 3ª questão da Atividade 3

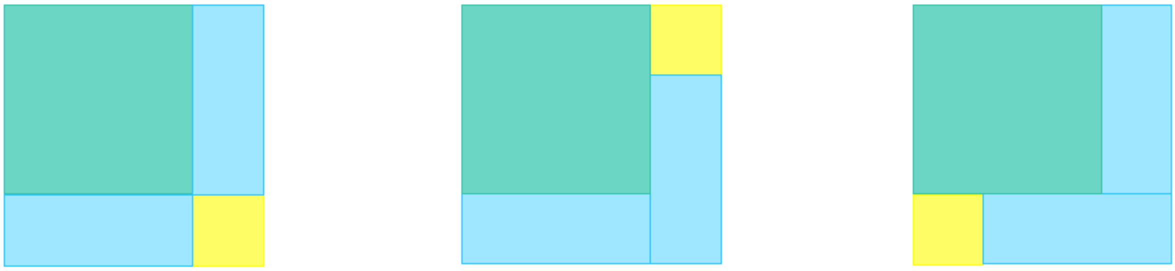
	Medida do lado do quadrado montado	Área do quadrado montado
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

Fonte: Autoria própria.

4) Explique como você calculou a área dos quadrados da questão anterior.

Na primeira questão, os alunos devem montar um quadrado, utilizando as 4 peças que lhes foram dadas. A figura 28 apresenta algumas configurações de montagem.

Figura 28 – Configurações de montagem do quadrado



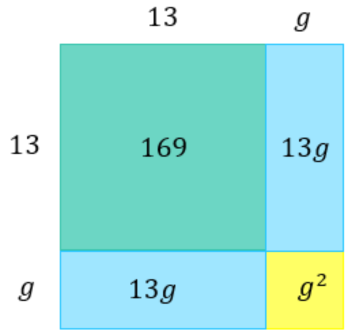
Fonte: Autoria própria

Na segunda questão, são dadas medidas para os lados dos quadrados e espera-se que os alunos — a partir das discussões iniciais — compreendam que essas também são as medidas dos lados dos retângulos. Assim, por exemplo, quando o quadrado maior tiver lado 7 e o menor lado 3, os retângulos, que são iguais, terão lados 3 e 7. Os alunos devem calcular a área dos quadrados e retângulos e preencher a tabela. Observe que nos dois primeiros itens são atribuídos valores numéricos para o lado dos quadrados. Em seguida, atribui-se valor numérico para um dos quadrados e valor desconhecido para o outro — valor este que é representado por uma letra. Com isso, espera-se que os alunos compreendam, primeiramente, a relação entre a representação geométrica da área — como a soma das partes que a compõe — e a representação numérica e, aos poucos, cheguem à relação geral $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Na terceira questão, eles devem determinar o lado e calcular a área do quadrado montado, supondo as mesmas medidas dadas na questão anterior. Na questão seguinte, eles devem explicar o método que utilizaram para obter a área dos quadrados.

Observe que há duas formas de calcular a área formada. Tomemos como exemplo o exercício onde o quadrado maior tem lado 13 e o menor tem lado g. O quadrado formado pela união das quatro peças terá lado $13 + g$. Assim, sua área será $(13 + g)^2 = g^2 + 26g + 169$. Pode-se, também, calcular a área total do quadrado a partir da soma das áreas das partes $(g^2 + 13g + 13g + 169)$, obtendo o mesmo resultado.

Figura 29 – Representação geométrica da expressão $g^2 + 26g + 169$



Fonte: Autoria própria

Cada uma das formas de se calcular deve ser explicada pelo professor, estabelecendo a equivalência genérica $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e mostrando como se identificar e fatorar um trinômio quadrado perfeito. Durante esse processo, o professor pode exibir exemplos de trinômios que não possam ser fatorados como quadrados perfeitos, incentivando os alunos a discutirem e justificarem o porquê disso.

Concluídas as discussões e explicações a respeito das três questões, o professor deve dar atenção especial aos itens *c, d* e *e*. Quando igualadas a um valor real, as expressões obtidas nesses itens representam equações do segundo grau completas. Assim, o professor deve mostrar aos alunos como resolver as equações do segundo grau através da fatoração do trinômio quadrado perfeito.

O quadro 11 apresenta as equações do segundo grau obtidas ao se igualar as expressões dos itens *c, d* e *e* a 0, 16 e 25, respectivamente, bem como a forma de resolvê-las através da fatoração.

Quadro 11 – Resolução das equações do segundo grau pelo método de fatoração do trinômio quadrado perfeito

Equação do 2° grau	Fatorando o primeiro membro da equação	Extraindo a raiz quadrada dos membros	Soluções
$g^2 + 26g + 169 = 0$	$(g+13)^2 = 0$	$g + 13 = 0$	$g = -13$
$x^2 + 4x + 4 = 16$	$(x+2)^2 = 16$	$x + 2 = \pm 4$	$x_1 = -2 + 4 = 2$ $x_2 = -2 - 4 = -6$
$4z^2 - 16z + 16 = 25$	$(2z-4)^2 = 25$	$2z - 4 = \pm 5$	$z_1 = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$ $z_2 = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$

Fonte: Autoria própria

Novamente, ressaltamos a importância de se discutir com os alunos a existência de até duas soluções para esse tipo de equação e de verificar as soluções.

A compreensão desse conteúdo é pré-requisito fundamental para o método de completar quadrados que será visto na próxima atividade. Por isso, recomendamos que o professor esteja atento ao desenvolvimento individual dos alunos e, se sentir necessidade, trabalhe mais exemplos.

3.2.4. Atividade 4: completando quadrado

A presente atividade tem por objetivo proporcionar a compreensão do método de completar quadrado, por meio de procedimentos geométricos e algébricos.

O método de completar quadrados para a resolução de equações do segundo grau esteve presente na matemática de diversos povos no decorrer da evolução histórica dessas equações. Os procedimentos babilônicos de "cortar e colar" consistiam em manipular uma região retangular e completá-la, para que fosse transformada em um quadrado. Uma vez que a área desse quadrado era conhecida, era possível determinar a medida de seu lado e descobrir um valor desconhecido. Séculos mais tarde, esse método também foi usado pelos hindus — cujos procedimentos para resolução das equações do segundo grau eram aritméticos e algébricos — e pelos árabes — como Al-Khwarizmi, que fazia uso de procedimentos algébricos e "demonstrações" geométricas.

Cada um desses momentos históricos reflete diferentes necessidades, interesses e contextos para o desenvolvimento das equações do segundo grau. Os enunciados dos problemas babilônicos possuíam caráter geométrico. Assim, é possível que, para esse povo, as equações do segundo grau tenham surgido a partir de uma situação real (o cálculo de áreas retangulares) e se desenvolvido a partir do aprofundamento de problemas dentro da própria matemática. Os hindus tinham grande interesse pela astronomia. Assim, para eles, as equações do segundo grau eram uma ferramenta para resolver problemas pertinentes a essa área de conhecimento. Al-Khwarizmi, por sua vez, classificou e desenvolveu métodos gerais e demonstrações para a resolução dessas equações, o que reflete um interesse em desenvolver a matemática como área de conhecimento.

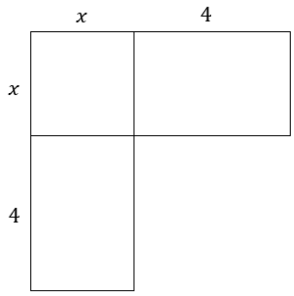
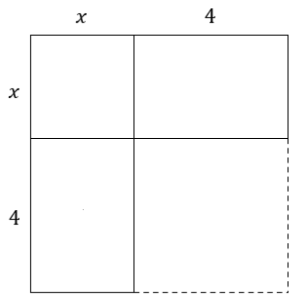
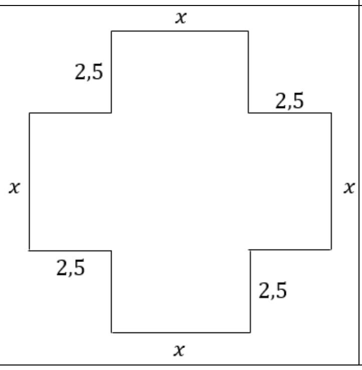
Essas diferentes necessidades para o desenvolvimento do método de completar quadrado — e o estudo das equações do segundo grau, como um todo —, podem ser mencionadas pelo professor, para que os alunos compreendam que essas equações surgiram de necessidades reais.

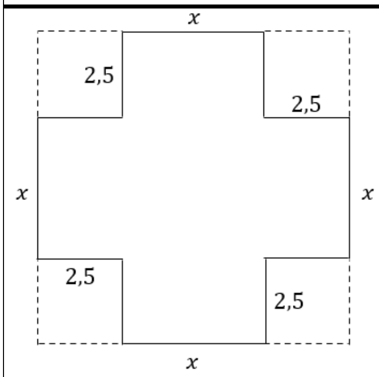
Para a realização dessa atividade, que será dividida em duas etapas, sugere-se a divisão da turma em duplas ou trios

Na primeira etapa, cada aluno deve receber uma folha com o seguinte exercício:

1) Complete o quadro:

Quadro 12 – Quadro a ser preenchido pelos alunos na 1ª questão da Atividade 4

Representação geométrica da área	Representação numérica da área	Representação algébrica (Equação que representa a área da figura)
	A figura possui área igual a 20	
	Completando o quadrado, a figura passa a ter área:_____	
	A figura possui área igual a 39	

Representação geométrica da área	Representação numérica da área	Representação algébrica (Equação que representa a área da figura)
	Completando o quadrado, a figura passa a ter área:_____	

Fonte: Autoria própria.

Nessa primeira etapa, os alunos devem observar as representações geométricas das áreas, seu valor numérico e determinar sua representação algébrica — isto é, deverão determinar a equação que representa a área das figuras. Para tal, eles devem calcular a área das partes (quadrados e retângulos) que compõem a figura.

Em um primeiro momento, os grupos devem debater entre si o preenchimento do quadro. O professor deve solucionar dúvidas, tomando o cuidado de não entregar as respostas. A colunas 2 e 3 devem ser preenchidas conforme mostra o quadro 13.

Quadro 13 – Preenchimento das colunas 2 e 3 do quadro da 1ª questão da Atividade 4

Representação numérica da área	Representação algébrica (Equação que representa a área da figura)
A figura possui área igual a 20	$x^2 + 8x = 20$
Completando o quadrado, a figura passa a ter área: $20 + 16 = 36$	$x^2 + 8x + 16 = 36$
A figura possui área igual a 39	$x^2 + 10x = 39$
Completando o quadrado, a figura passa a ter área: $39 + 25 = 64$	$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$

Fonte: Autoria própria.

Finalizado o preenchimento do quadro, o professor deve debater com os grupos os procedimentos adotados por eles, os resultados obtidos e explicar o método de “completar quadrado”, comparando as representações geométrica — na qual uma figura composta por retângulos é completada e transformada em um quadrado — e algébrica — que consiste em completar a equação para esta possa ser fatorada em um quadrado perfeito.

Em seguida, o professor deve resolver, juntamente com os alunos, as equações obtidas ao se completar quadrado (terceira coluna, terceira e quinta linhas), por meio do método de fatoração de quadrados perfeitos, conforme visto na atividade 3.

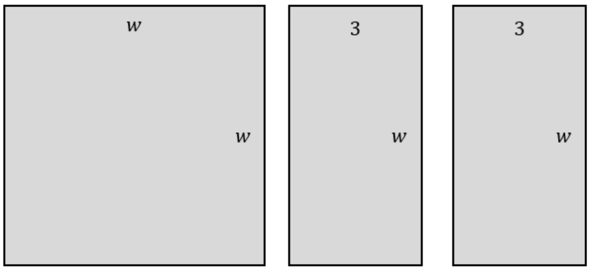
Para a segunda etapa da atividade, cada grupo deve receber uma folha com ilustrações de quadrados e retângulos de medidas dadas, que deverão ser recortados para serem manipulados pelos alunos. Os alunos devem registrar os cálculos, equações e resultados obtidos.

O professor deve expor no quadro cinco problemas, os quais serão apresentados e comentados a seguir.

1) *A área formada por um quadrado de lado w e dois retângulos iguais de lados 3 e w tem 135 u.a. (unidades de área). Qual o valor de w?*

Para a realização dessa questão, o aluno deverá ter em mãos o quadrado e os retângulos representados na figura 30.

Figura 30 – Representação das peças para o 1º problema da Atividade 4

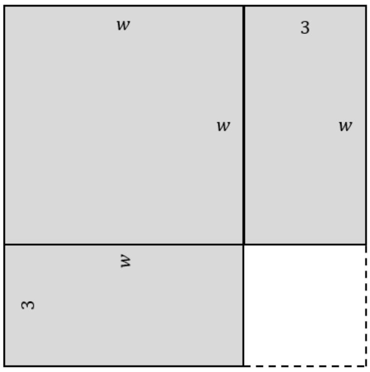


Fonte: Autoria própria

O professor deve iniciar a resolução do problema questionando os alunos sobre a área do quadrado e dos retângulos e pedindo que eles escrevam a equação que representa a área total ($w^2 + 6w = 135$).

Em seguida, o professor deve discutir com os alunos estratégias que podem ser adotadas para completar o quadrado. Pode-se recomendar que eles observem as figuras da folha utilizada na primeira etapa e tentem compreender o que possibilitou o uso do procedimento naqueles casos. O professor deve, também, sugerir que eles manipulem as peças e tentem uma configuração que permita completar o quadrado. Com isso, espera-se que os alunos cheguem à configuração das peças representada na figura 31.

Figura 31 – Configuração para completar o quadrado

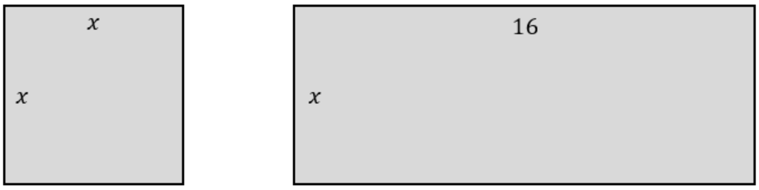


Fonte: Autoria própria

Completando o quadrado, adicionaremos à figura um quadrado de lado 3 e, portanto, área 9. Dessa forma, a área da figura passa a ser $w^2 + 6w + 9 = 135 + 9$ ou $(w + 3)^2 = 144$, de onde teremos $w = \pm 12 - 3$. É importante o professor ressaltar que existem duas soluções, mas, por se tratar do lado de um quadrado, apenas uma delas satisfaz o problema ($w = 9$). O professor deve recomendar que os alunos testem as soluções.

2) *A área formada por um quadrado de lado x e um retângulo de lados 16 e x tem 105 u.a. Qual a área numérica do retângulo?*

Figura 32 – Representação das peças para o 2º problema da Atividade 4



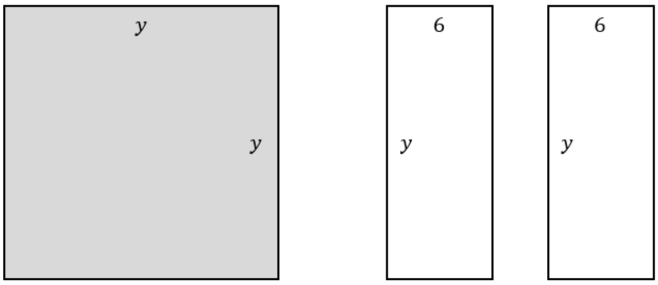
Fonte: Autoria própria

Após os alunos determinarem a equação que representa a área total da figura, o professor deve chamar a atenção deles para o fato de que há apenas um retângulo, ao invés de dois como no problema anterior. *Como, então, podemos obter dois retângulos iguais?* Para tal, basta dividir o lado de medida conhecida ao meio. Nesse caso, dividindo o lado que mede 16 ao meio, obtém-se dois retângulos iguais de lados 8 e x. Sugere-se que o retângulo seja cortado ao meio para que os alunos possam manipulá-lo.

Obtidos os retângulos iguais, os procedimentos seguintes são semelhantes ao do problema anterior. Teremos $x = 5$ e a área numérica do retângulo será de 80 u.a.

3) *Da área de um quadrado de lado y, foram retirados dois retângulos iguais de lados 6 e y, resultando em uma área de 28 u.a. Qual deve ser a medida do lado do quadrado?*

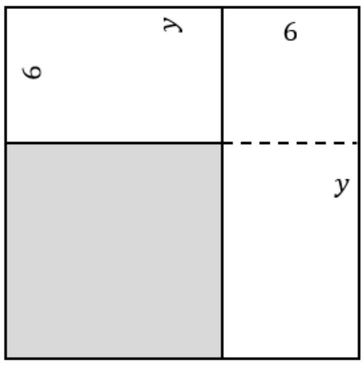
Figura 33 – Representação das peças para o 3º problema da Atividade 4



Fonte: Autoria própria

O terceiro problema difere dos dois anteriores por se tratar de uma retirada, isto é, uma subtração. Assim, a equação que representa o problema é $y^2 - 12y = 28$. Dessa vez, os retângulos serão posicionados sobre a área do quadrado, simbolizando a retirada, conforme mostra a figura 34.

Figura 34 – Representação geométrica da expressão $y^2 - 12y$



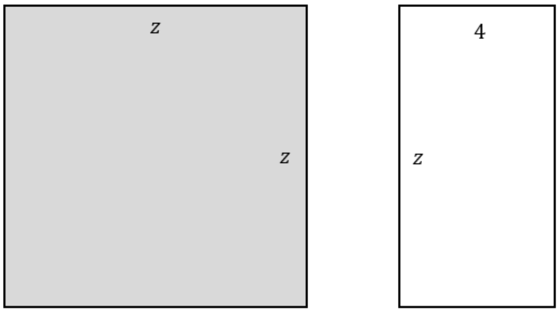
Fonte: Autoria própria

Duas observações a respeito dessa configuração precisam ser feitas: o quadrado completado (em cinza) tem lado $y - 6$, pois de ambos seus lados foram retiradas seis unidades; os retângulos se superpõem, dessa forma a área quadrada de lado 6 é subtraída *duas* vezes. Portanto, para compensar essa retirada, devemos repô-la acrescentando sua área (36) à expressão $y^2 - 12y$.

Assim, a equação que representa o problema deve ser escrita como $y^2 - 12y + 36 = 28 + 36$ ou $(y - 6)^2 = 64$. Logo, temos $y = \pm 8 + 6$. Como o problema trata do lado de um quadrado, tem-se $y = 14$.

4) *Da área de um quadrado de lado z, foi retirado um retângulo de lados 4 e z, resultando em uma área de 21 u.a. Qual a área (numérica) original do quadrado?*

Figura 35 – Representação das peças para o 4º problema da Atividade 4

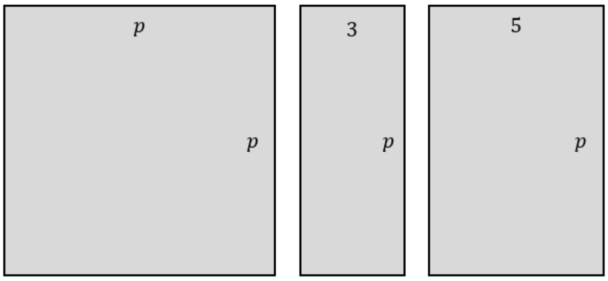


Fonte: Autoria própria

Para a realização dessa atividade, o aluno deve cortar o retângulo ao meio, de forma a obter dois retângulos iguais de lados 2 e z. Feito isso, a resolução do problema é semelhante ao anterior.

5) *A área formada pela junção de um quadrado de lado p e dois retângulos, um de lados p e 3 e outro de lados p e 5, resulta em uma área de 86 u.a. Qual deve ser a medida do lado do quadrado?*

Figura 36 – Representação das peças para o 5º problema da Atividade 4



Fonte: Autoria própria

Nesse problema, a presença de dois retângulos pode levar o aluno à errônea conclusão de basta posicioná-los na base e no lado do quadrado para se completar o quadrado. Por isso, o professor deve chamar a atenção dos alunos para o fato de os retângulos serem distintos e que é necessário igualá-los. Para tal, deve-se recortar um retângulo de lados 1 e p do retângulo maior e uni-lo ao retângulo menor. Dessa forma, serão obtidos dois retângulos de lados 4 e p. Os procedimentos seguintes são semelhantes aos das questões anteriores.

3.2.5. Atividade 5: apresentando a fórmula resolutiva

No Brasil, a criação da fórmula para a resolução das equações do segundo grau é erroneamente creditada ao matemático hindu Bhaskara. Ainda que tal matemático possuísse um método generalizado para resolver o análogo a uma equação deste tipo nos termos da matemática de sua época, ele não possuía simbolismo para os coeficientes e, por isso, não pode ter criado a fórmula (ROQUE, 2014, p. 178).

Não se sabe ao certo quem, de fato, inventou a fórmula. Entretanto, sabemos que essa invenção resulta dos estudos de diversos povos e matemáticos ao decorrer dos tempos. Expor isso aos alunos é importante para promover a desmistificação da matemática e romper com a ideia de que os conceitos, fórmulas e definições resultam de mentes que, aparentemente, criaram esses conceitos por pura genialidade.

Nas salas de aula, não é incomum que a fórmula resolutiva seja apresentada aos alunos sem que se explique de onde surgiu ou como foi obtida, de forma que eles apenas a memorizam e reproduzem sua aplicação.

Buscando romper com esse padrão, a presente atividade tem por objetivo proporcionar a construção da fórmula, a partir da generalização do método de completar quadrado. Para tal, professor e alunos construirão, juntos, um quadro aplicando os procedimentos de resolução primeiro a um exemplo com coeficientes dados e, em seguida, à equação genérica.

O quadro 14 apresenta o modelo a ser montado e preenchido pelo professor e alunos.

Quadro 14 – Quadro a ser preenchido pelo professor e alunos na Atividade 5

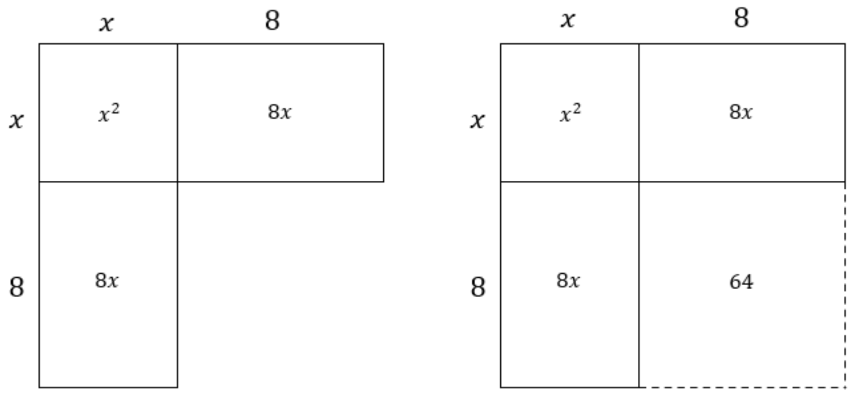
Passos	$2x^2 + 32x - 210 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
Divida todos os termos da equação por a		
Tome a metade de $\frac{b}{a}$		
Eleve ao quadrado		
Some $\frac{-c}{a}$		
Extraia a raiz quadrada		
Subtraia a metade de $\frac{b}{a}$		

Fonte: Autoria própria.

Um primeiro olhar sobre o quadro pode gerar dúvidas sobre a origem dos passos determinados e como preenchê-lo. Por isso, explicaremos passo a passo seu preenchimento.

O processo deve ser iniciado com a resolução da equação $2x^2 + 32x - 210 = 0$, pelo método de completar quadrado. O primeiro passo consiste em dividir todos os termos da equação por a, para que o coeficiente de x^2 seja 1. Esse passo tem por objetivo facilitar o processo de fatoração. Assim, dividindo os termos da equação por a, que nesse caso é 2, obtemos a equação $x^2 + 16x - 105 = 0$.[3]

Figura 37 – Representação geométrica da expressão $x^2 + 16x$ e do completamento do quadrado



Fonte: Autoria própria

Para completarmos o quadrado algebricamente, basta isolarmos o termo independente e somarmos 64 em ambos os lados da igualdade — ou ainda, podemos somar diretamente $105 + 64 = 169$ a ambos os lados. Dessa forma, obteremos a equação fatorada $(x + 8)^2 = 169$ e $x = -8 \pm 13$.

O processo geométrico não é diferente. Como visto, em quadrados perfeitos, bx resulta da soma de dois termos iguais — representados geometricamente pelos dois retângulos iguais. Assim, no segundo passo, tomamos a metade de b, que nesse caso é 16, obtendo 8. Para completarmos o quadrado, devemos multiplicar o valor obtido por si próprio (terceiro passo). Essa multiplicação representa a área que estamos unindo à figura original para completar o quadrado. No quarto passo, somamos o valor obtido ao termo independente — o resultado dessa soma representa a área do quadrado originado pelo completamento. Para descobrirmos as raízes, basta tirarmos a raiz quadrada do resultado da soma — que nos fornecerá o “lado do

[3] A mesma equação foi trabalhada na questão 2 da atividade 4. Optamos por essa equação para que o professor e os alunos possam recorrer ao exercício já resolvido e à representação geométrica.

quadrado” completado — e subtrairmos a metade de b — que uma das partes do lado do quadrado perfeito.

Finalizada a resolução da equação, os passos enunciados devem ser aplicados à equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$.

Quadro 15 – Quadro referente à Atividade 5 preenchido

Instruções	$2x^2 + 16x - 40 = 0$	Forma genérica $ax^2 + bx + c = 0$
Divida todos os termos da equação por a	$x^2 + 8x - 20 = 0$	$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
Tome a metade de $\frac{b}{a}$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{b}{2a}$
Eleve ao quadrado	$4^2 = 16$	$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$
Some $-\frac{c}{a}$	$16 + 20 = 36$	$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
Extraia a raiz quadrada	$\sqrt{36} = \pm 6$	$\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$
Subtraia a metade de $\frac{b}{a}$	$\pm 6 - 4$	$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$

Fonte: Autoria própria.

A equação obtida na última linha da terceira coluna pode ser reescrita como $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, na qual a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada *discriminante* e é representada pela letra grega Δ (delta).

Observe que embora tenhamos justificado geometricamente as instruções descritas na primeira coluna, as mesmas descrevem procedimentos aritméticos — conforme mostra a segunda coluna, onde os coeficientes da equação são dados.

Após o preenchimento do quadro, sugerimos que os alunos resolvam alguns exercícios novos e outros vistos em atividades anteriores, para que eles compreendam que a fórmula pode ser utilizada em qualquer caso e façam um comparativo entre os diferentes métodos de resolução.

Os exercícios propostos pelo professor devem englobar situações em que $\Delta < 0$ (a equação não possui solução real), $\Delta = 0$ (a equação possui uma solução) e $\Delta > 0$ (a equação possui duas soluções). Sugerimos os seguintes exemplos:

$$x^2 + 2x + 9 = 0$$

$$x^2 + 26x + 169 = 0$$

$$x^2 + 10x + 10 = 0$$

Caso sinta necessidade, o professor deve trabalhar mais exemplos que ajudem os alunos a compreenderem a gênese da fórmula e sua aplicação.

3.2.6. Atividade 6: soma e produto de raízes

A presente atividade tem por objetivo estabelecer as relações da soma e do produto das raízes da equação com os coeficientes a, b e c.

A atividade consiste nas seguintes questões:

1) *Escreva as equações na forma geral, encontre as raízes e preencha a tabela:*
   a) $x^2 + 4 = 4x$
   b) $x^2 - 3x + 21 = 7x$
   c) $3x^2 = -5x + 2$
   d) $2x^2 - 4x - 5 = 0$
   e) $13x^2 = 117$
   f) $9x^2 + 3x = 0$
   g) $x^2 + 4x = -2$
   h) $x^2 - 3 = 0$

Tabela 4 – Tabela a ser preenchida pelos alunos na 1ª questão da Atividade 6

	a	b	c	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
a)							
b)							
c)							
d)							
e)							
f)							
g)							
h)							

Fonte: Autoria própria.

2) *Você percebeu alguma relação da soma e do produto das raízes com os coeficientes da equação? Explique.*

Em um primeiro momento, sugerimos que os alunos resolvam as questões individualmente, para que o professor possa avaliar o desenvolvimento de cada um e solucionar dúvidas.

É importante que o professor incentive o uso de métodos variados, para que o aluno não se limite a um único método. Ressaltamos isso pois é comum que o aluno, ou o próprio professor, faça uso exagerado da fórmula resolutiva, mesmo em casos em que o uso da fórmula não é o procedimento mais rápido ou fácil — como quando se tem equações incompletas.

Os alunos deverão preencher uma tabela informando os coeficientes, raízes e a soma e o produto das raízes de cada uma das equações. O preenchimento das duas últimas colunas da tabela requer apenas o uso das operações aritméticas de soma e produto com números racionais e irracionais.

Após a realização dos exercícios, em pequenos grupos, os alunos devem debater os resultados obtidos e analisar a tabela. Em seguida, o professor deve auxiliar na formalização dessas relações, explicando que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

A compreensão dessas relações possibilita que certos tipos de equações do segundo grau sejam resolvidas mentalmente.

A atividade deve ser finalizada com a exposição equações no quadro, por exemplo:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

O professor deve pedir aos alunos que tentem encontrar as soluções mentalmente e conduzi-los a algumas reflexões de caráter aritmético. Para a primeira equação, por exemplo, o professor pode auxiliar com os seguintes comentários e observações:

- *Pensem em dois números que somados resultam em $-(-4) = 4$ e multiplicados resultam em 3.*
- *Observem que o resultado da multiplicação é positivo, então ambos os números são positivos ou ambos são negativos. Como o resultado da soma é positivo, ambos os números são positivos.*

Cabe ressaltar que nem sempre é fácil, sendo muitas vezes pouco possível calcular as raízes mentalmente, através de operações aritméticas, principalmente quando estas são fracionárias ou irracionais.

3.2.7. Atividade 7: problemas

A sétima e última atividade consiste na resolução de seis situações-problemas. Essa atividade tem por objetivo mostrar aplicações para as equações do segundo grau e exercitar a capacidade de interpretar o que é pedido, transitando entre a língua materna e a linguagem matemática.

Sugerimos que a resolução dos problemas seja feita individualmente ou em duplas, e cada um dos alunos receba uma folha com as questões.

A seguir, apresentaremos cada um dos problemas, seguidos por comentários.

1) *Para revestir uma parede retangular de 12 metros de extensão e 3,2 metros de altura, Ana precisou de 240 azulejos quadrados iguais.*
   a) *Quais a dimensão dos azulejos?*
   b) *Sabendo que uma caixa contém 2m² de azulejos, quantos vêm em cada caixa?*
   c) *Quantas caixas Ana precisou comprar?*
   d) *Se cada caixa custa R$15,00, quanto Ana gastou?*

Para resolver o item (a), o aluno deve observar que se a dimensão da parede é 12m $\times$ 3,2m, então sua área é 38,4m². Chamemos a medida do lado dos azulejos de x, então sua área é x^2.

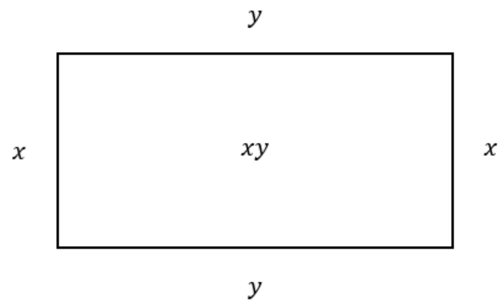
Assim, foram usados 240 azulejos de área x^2 para cobrir uma parede retangular de 38,4 m². Podemos representar algebricamente esse problema pela equação do segundo grau $240x^2 = 38{,}4$, cujas raízes são 0,4 e $-0{,}4$. Como estamos tratando da medida de um azulejo, temos que seu lado mede 0,4 metros, ou 40 centímetros.

Os itens (b), (c) e (d) resolvem-se a partir das seguintes constatações, motivadas por operações aritméticas: uma caixa com $2m^2$ possui 5 azulejos, pois $\frac{2}{0{,}4} = 5$; logo, foram compradas $\frac{240}{5} = 48$ caixas; como cada caixa custa R$15,00, então, ao comprar 48 caixas, Ana gastou R$720,00 ($48 \cdot 15 = 720$).

2) *Camila precisou de 22 metros de tela para cercar os quatro lados de um terreno retangular. Sabendo que a área cercada tem 24m², calcule os lados desse terreno.*

Como o terreno possui forma retangular, seus lados opostos possuem a mesma medida. Assim, podemos representar o terreno conforme a figura 38.

Figura 38 – Representação geométrica do problema 2



Fonte: Autoria própria

Para cerca-lo, foram usados 22 metros de tela, logo esse é o perímetro do terreno. A partir disso, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 22 \\ x \cdot y = 24 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y = 11 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$$

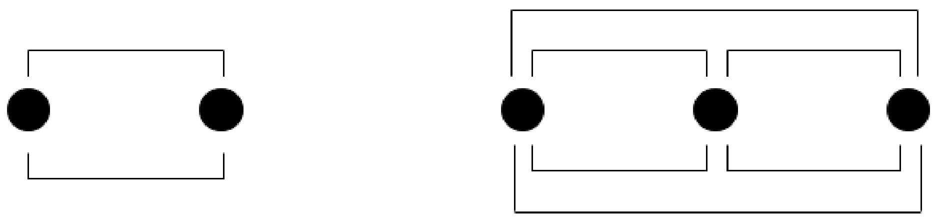
Fazendo $x = 11 - y$ e substituindo na segunda equação, obtemos a equação do segundo grau $-y^2 + 11y - 24 = 0$, cujas raízes são 3 e 8. Assim, se $y = 3$, então $x = 8$. E se $y = 8$, então $x = 3$.

3) *Em um campeonato de futebol, cada time joga duas partidas contra os outros times participantes, uma dentro e outra fora de casa. Se no campeonato foram jogadas 380 partidas, quantos times participaram?*

Determinar a expressão que indica o número de partidas jogadas pode não ser tão fácil para os alunos. Uma estratégia que o professor pode adotar é construir, junto com eles, uma tabela contendo a quantidade de times e o número de partidas jogadas e, a partir disso, determinar a expressão.

A figura 39 apresenta um diagrama que pode ser construído perante a turma, onde os círculos representam os times e os traços representam as partidas jogadas entre eles.

Figura 39 – Diagrama representando as partidas jogadas pelos times



Fonte: Autoria própria

Para um número n de times participantes, serão jogadas $n(n-1)$ partidas. Logo, para descobrir quantos times participara de um campeonato em que foram jogadas 380 partidas, temos de resolver a equação do segundo grau $n^2 - n - 380 = 0$.

4) *O Índice de Massa Corporal (IMC) é um parâmetro internacional utilizado para calcular o nível de gordura de uma pessoa e saber se ela está dentro do peso ideal para uma boa qualidade de vida e saúde. Ele é calculado pela divisão do peso (p), em quilos, pela altura (h) ao quadrado, em metros:*

$$\mathrm{IMC} = \frac{p}{h^2}$$

- *O resultado do IMC indica a situação do indivíduo:*

Quadro 16 - Índice de Massa Corporal

IMC	Situação
Menor que 18,5	Magreza
Entre 18,5 e 24,9	Normal
Entre 25 e 29,9	Sobrepeso
Maior que 30	Obesidade

Fonte: Adaptado de Zanin (2020).

a) Calcule seu IMC e determine sua situação.

b) Pedro pesa 77,76kg e possui Índice de Massa Corporal igual a 24. Qual a altura e a situação dele?

A resposta do item (a) é pessoal. Os alunos devem calcular seus próprios IMC, substituindo seu peso e altura na fórmula, e determinar em que categoria se enquadram.

Para realização do item (b), basta substituir os valores conhecidos na fórmula, obtendo:

$$24 = \frac{77{,}76}{h^2}$$

Assim, deve ser resolvida a equação $24h^2 = 77{,}76$, cujas raízes são 1,8 e $-1{,}8$. Como a questão trata da altura de um indivíduo, temos que Pedro tem 1,8 metros de altura. Sua situação pode ser determinada a partir do IMC dado, 24.

Para a realização do item (a) desse problema, o professor pode, ainda, utilizar uma fita métrica e uma balança para obter a altura e o peso dos alunos, tornando a aula mais dinâmica.

5) *Carla aplicou R$2000,00 em um banco no início do ano. Ao fim de cada ano, o banco incorpora, na conta de Carla, uma taxa de x por cento da quantia aplicada no começo de cada ano.*

   a) *Qual expressão indica a quantia que Carla terá na conta ao fim do primeiro ano?*

   b) *Qual expressão indica a quantia que Carla terá na conta ao fim do segundo ano, caso ela não retire nenhum valor?*

   c) *Ao fim do segundo ano, Carla tinha em sua conta R$2420,00. Qual foi a taxa anual da aplicação?*

Caso os alunos não estejam familiarizados com o que é uma aplicação ou não recordem do conteúdo de porcentagem, sugerimos que o professor solucione o item (a) juntamente com a turma. A expressão que determina a quantia que Carla terá ao fim do primeiro ano é dada pela soma do valor aplicado com o valor incorporado: $2000 + (2000 \cdot x) = 2000 + 2000x$.

No item (b), o professor deve chamar atenção para o fato de que nenhum valor foi retirado e o valor $2000x$ foi adicionado. Assim, no início do segundo mês, Carla terá $2000 + 2000x$ para aplicar. Logo, a expressão que determina a quantia que Carla terá ao fim do segundo ano é $2000 + 2000x + (2000 + 2000x)x$, que pode ser reescrito como $2000x^2 + 4000\text{x} + 2000$.

O item (c) requer a resolução da equação do segundo grau $2000x^2 + 4000x + 2000 = 2420$, que podemos reescrever como $2000(x + 1)^2 = 2420$, cujas raízes são 0,1 e $-2{,}1$. Logo, temos que a taxa é 0,1 (10%).

6) *Existem várias regras para determinar a dosagem de remédios para crianças, quando a dosagem para adultos foi especificada. Abaixo, temos dois exemplos dessas regras, onde I é a idade da criança e d é a dosagem para o adulto:*

Regra de Young: $\frac{I \cdot d}{I+12}$

Regra de Cowling: $\frac{(I+1) \cdot d}{24}$

   a) *O Bisolvon é um remédio indicado para o tratamento de doenças dos brônquios e ajuda a dissolver o catarro e facilitar a expectoração. A dose diária recomendada para adolescentes acima de 12 anos e adultos é de*

24mg.Qual será a dosagem recomendada para uma criança de 3 anos, de acordo com a Regra de Young? E de acordo com a Regra de Cowling?

b) Em que idade a dosagem do remédio, de acordo com essas regras, será igual?

A resolução do item (a) consiste na substituição dos valores de I e d por 3 e 24, respectivamente, e na resolução da expressão. Dessa forma, a dosagem diária do remédio para uma criança de 3 anos pela Regra de Young será de 4,8 mg. Já pela Regra de Cowling, a dosagem diária será de 4 mg.

Para resolver o item (b) é necessário igualar as expressões e realizar o processo de multiplicação cruzada. Dessa forma, será obtida a equação $I^2 - 11I + 12 = 0$, da qual teremos $I_1 = 1{,}23$ e $I_2 = 9{,}77$. Arredondando os valores, teremos que as dosagens serão iguais para crianças de 1 e 10 anos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, o presente trabalho proporcionou uma reflexão sobre o ensino da aritmética, da geometria e da álgebra no Brasil. O breve levantamento histórico sobre o ensino da matemática no país, mostrando o espaço ocupado por cada um dos campos citados e a relevância que os mesmos foram adquirindo ao decorrer dos tempos, revelou a importância dessa área de conhecimento em uma sociedade em expansão política, econômica e tecnológica. Além disso, possibilitou a percepção de que uma aprendizagem matemática efetiva requer — mais do que conhecer os conceitos — conhecer as aplicações da matemática e compreender como os conteúdos se relacionam entre si e com outras áreas de conhecimento.

Ainda que, na teoria, muito se tenha falado sobre um ensino de matemática que contemple os diversos campos, não é incomum nos depararmos com currículos e livros didáticos que valorizam um campo, em detrimento de outro. Como consequência dessa discrepância de tratamentos muitas vezes os alunos não desenvolvem plenamente o raciocínio referente a um determinado campo e não conseguem estabelecer as devidas relações entre os conteúdos matemáticos que lhes são ensinados.

A motivação para o desenvolvimento da sequência didática se deu a partir da percepção de que as equações do segundo grau são tratadas, na maioria das vezes, de forma puramente algébrica, consistindo apenas na repetição dos procedimentos da fórmula resolutiva, de modo que os alunos, além de se depararem com diversas dificuldades durante o processo de aprendizagem, não veem aplicabilidade para o conteúdo e acabam por considerá-lo sem utilidade.

A análise de alguns momentos que compõem a evolução histórica das equações do segundo grau foi importante por diversos motivos. Primeiramente, possibilitou o contato com diferentes tratamentos e contextos para essas equações. As diferentes abordagens acabaram por revelar o papel da aritmética e da geometria na construção dessas equações, dessa forma, justificando e reforçando a necessidade de se ensinar esse conteúdo, em particular, integrando os três campos. Além disso, a análise promoveu a desmistificação da origem da fórmula resolutiva, uma vez que mostrou que a mesma não resulta dos estudos de apenas um matemático.

Dessa forma, foram buscadas alternativas, dentro da história da matemática e da proposta de integração, que possibilitassem romper com o molde tecnicista de ensino dessas equações. A inclusão de elementos aritméticos e geométricos possibilita que, no decorrer da sequência, sejam apresentadas diferentes formas para se representar e resolver essas equações. Nossa preocupação com diferentes representações para um mesmo problema baseia-se no fato de que nem sempre os alunos compreendem com facilidade os simbolismos matemáticos. Dessa forma, buscamos na Geometria um recurso a mais para a construção dos conceitos.

Com a proposta de sequência didática, pretendemos que o professor amplie sua visão sobre as equações do segundo grau, e promova um ensino que contemple mais do que a aplicação da fórmula. Com isso, esperamos que os alunos tenham contato com diferentes contextos para o estudo desse conteúdo, bem como compreendam suas aplicações, tanto dentro da própria matemática, quanto em outras áreas de conhecimento. Além disso, com nossas propostas de trabalho em grupo, uso de materiais didáticos e adoção de uma dinâmica que valorize o diálogo, discussão e reflexão, esperamos que os professores repensem a forma tradicional como as aulas de matemática costumam ser ministradas — onde o professor transmite o conteúdo e os alunos o recebem — e deem um papel mais ativo aos alunos na construção dos conhecimentos.

Embora nosso objetivo inicial consistisse na aplicação da sequência didática em uma turma de 9° ano do ensino fundamental, o mesmo não pôde ser feito devido à pandemia do vírus COVID-19, a necessidade de isolamento social e o fechamento das escolas. Sabemos que apenas a teoria não garante o sucesso das atividades propostas. Por isso, pretende-se, futuramente, dar continuidade a essa pesquisa, aplicando-a e enriquecendo-a com a análise dos resultados da aplicação.

REFERÊNCIAS

AL-KHWARIZMI. **The Algebra of Mohammed Ben Musa**. Tradução de Frederic Rosen. London: Oriental Translation Fund, 1831.

BHASCARA; BRAHMEGUPTA. **Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara**. Tradução de Henry Thomas Colebrooke. London: John Murray, Albemarle Street, 1817.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Câmara dos Deputados**. Rio de Janeiro. 1810.

BRASIL. **Decreto n° 346, de 19 de abril de 1890**. Rio de Janeiro. 1890.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília. 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2017.

CAMARGO, A. R. **Aulas régias**. MAPA - Memória da Administração Pública Brasileira, Maio 2013. Disponivel em: http://mapa.an.gov.br/index.php/menu-de-categorias-2/260-aulas-regias. Acesso em: 12 ago. 2020.

CARDOSO, T. F. L. **As aulas régias no Rio de Janeiro:** do projeto à prática (1759-1834). História da Educação, out 1999. 105-130.

CARVALHO, J. B. P. D. **Mathematics Education in Latin America**. In: KARP, A.; SCHUBRING, G. Handbook on the History of Mathematics Education. New York: Springer, 2014. p. 335-360.

CORRÊA, B. M. **A Introdução à Arte Analítica de François Viète: comentários e tradução**. Rio de Janeiro. 2009.

DESCARTES, R. **The geometry of René Descartes**. Tradução de Marcia L. Latham Eugene Smith. New York: Dover, 1954.

DUARTE, A. R. S. **Euclides Roxo e a Proposta Modernizadora do Ensino da Matemática**. Vitória da Conquista. 2019.

EUCLIDES. **The Elements of Euclid, The First Six Books, Together with the Eleventh and Twelfth**. Tradução de Robert Simson. Philadelphia: C. Sherman & CO., 1838.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 3a. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.

FARIA, R. W. S. D. C. **Raciocínio Proporcional**: Integrando Aritmética, Geometria e Álgebra com o GeoGebra. Rio Claro. 2016.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino da Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

HEATH, T. L. **Diophantus of Alexandria**. Cambridge: University Cambridge, 1885.

HØYRUP, J. **Algebra in Cuneiform:** introduction to an old babylonian geometrical technique. Berlin: PRO BUSINESS digital printing Deutschland GmbH, 2017.

LOH, Po-Shen. **A Simpe Proof of the Quadratic Formula**, 16 dez. 2019. Disponivel em: https://arxiv.org/pdf/1910.06709.pdf. Acesso em: 13 nov. 2020.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista - SBEM - N° 4 - 1° semestre, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 2°ed.rev. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

MAGINA, S. **A Teoria dos Campos Conceituais**: contribuições da Psicologia para a prática docente. Encontro Regional de Professores de Matemática, Campinas, 2005. Disponivel em: https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf. Acesso em: 25 out. 2020.

MONTI, E. M. G. D. **Aulas régias: luz que emana do trono**. Quaestio, abr., 2018. 73-89.

MOREIRA, M. A. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud**, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área. Investigações em Ensino de Ciências, p. 7-29, 2002.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil:** causas e consequências. Revista Zetetiké, Ano I - n°1, p. 7-17, 1993.

PLAISANCE, E.; VERGNAUD, G. **As Ciências da Educação**. Tradução de Nadyr de Salles Penteado e Odila Aparecida de Queiroz. São Paulo, SP: Edições Loyola, 2003.

PORTUGAL. **Alvará régio de 28 de junho de 1759**, 1759. Disponivel em: http://193.137.22.223/fotos/editor2/RDE/L/S18/1751_1760/1759_06_28_alvara.pdf. Acesso em: 13 ago. 2020.

PORTUGAL. **Colecção da Legislação Portugueza**. Lisboa. 1796.

RADFORD, L. **Cognição Matemática:** História, Antropologia e Epstemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

ROQUE, T. **História da matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. **Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?** Revista Brasileira de História da Ciência, p. 167-185, 2014.

SCHUBRING, G. **O Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática e o Papel da Alemanha:** um estudo de caso na Transmissão de Conceitos, jan/jun de 1999.

SCHUBRING, G. **Mathematics Education in Germany (Modern Times)**. In: KARP, A.; SCHUBRING, G. Handbook on the History of Mathematics Education. New York: Springer, 2014. p. 241-256.

SILVA, M. R. G. D. **Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática**. Mimesis, Bauru, v. 19, n. 2, p. 135-145, 1998.

SMITH, D. E. **History of Mathematics**. New York: Dover, v. 1, 1958.

SOARES, F. **Os congressos de ensino da Matemática no Brasil nas décadas de 1950 e 1960 e as discussões sobre a Matemática Moderna**. São Paulo. 2005.

SOUZA, G. M. D. **Felix Klein e Euclides Roxo:** debates sobre o ensino de matemática no começo do século XX. Campinas. 2010.

VAIYAVUTJAMAI, P.; CLEMENTS, M. A. E**ffects of Classroom Instruction on Students' Understanding of Quadratic Equations**. Mathematics Education Research Journal, Vol. 18, No. 1, 2006. 47-77.

VERGNAUD, G. **A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems**. In: CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M.; ROMBERG, T. A. Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective. Hillsdale: Revivals, 1982. p. 39-59.

VERGNAUD, G. **Teoria dos Campos Conceituais**. Anais do 1° Seminário Internacional de Educação MMatemática do Rio de Janeiro, p. 1-26, 1993.

VIÈTE, F. **In Artem Analyticem Isagoge:** Seorism excussa ab Opere restitute Mathematica Analyseos. [S.l.]: [s.n.], 1591. Disponivel em: https://books.google.com.br/books?id=5lxRAAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 26 ago. 2020.

VIÈTE, F. **The Analytic Art**. Tradução de T. Richard Witmer. New York: Dover Publications Inc., 1983.

WAERDEN, B. L. V. D. **A History of Algebra:** From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer, 1985.

ZANIN, T. Calculadora de IMC. **Tua Saúde**, 17 set. 2020. Disponivel em: <https://www.tuasaude.com/calculadora/imc/>. Acesso em: 7 nov. 2020.

APÊNDICE A – Método Alternativo para a Resolução de Equações Quadráticas

Embora exista mais de uma maneira de se resolver uma equação do segundo grau — pelo método de fatoração, completando quadrado, realizando manipulações algébricas em equações incompletas, entre outros — o método mais usado em sala de aula continua sendo a aplicação da fórmula resolutiva.

A invenção da fórmula representa um marco no estudo dessas equações e sua aplicação aparentemente simplifica o processo de resolução. Fizemos uso do termo "aparentemente", pois seu uso pode vir a simplificar o processo de ensino — uma vez que, em muitos casos, o estudo das equações do segundo acaba por ser reduzido à aplicação repetitiva da fórmula —, mas não necessariamente facilita a aprendizagem. Ao fazerem o uso repetitivo da fórmula em questões prontas, além de terem de lidar com uma grande quantidade de simbolismos algébricos, os quais eles têm dificuldade de compreender, os alunos se veem tendo de aprender um conteúdo para o qual não enxergam nenhuma utilidade. Assim, a fórmula resolutiva da equação quadrática, que deveria ser uma ferramenta que auxilia a compreensão do conteúdo, acaba por se tornar um empecilho para o entendimento do mesmo.

Loh (2019, p. 3) compara a resolução das equações quadráticas com as equações lineares. Embora estas segundas possam ser genericamente representadas por $ax + b = 0$ e sua solução seja $x = -\frac{b}{a}$, é comum que sejam resolvidas por procedimentos algébricos manipulativos, e não pela conexão com uma fórmula memorizada.

Em seu artigo "*A Simple Proof of the Quadratic Formula*", o matemático Po-Shen Loh apresenta um método alternativo para a resolução das equações do segundo grau. Durante o estudo dessas equações, não é incomum que o professor apresente aos alunos o método de fatoração e a busca por um par de números, cuja soma e o produto resultam nos coeficientes da equação. O método descrito por Loh sugere a substituição desse processo, que nem sempre é evidente, por outro procedimento: parametrizar o par de números por sua média, mais ou menos um valor desconhecido comum (LOH, 2019, p. 4).

O procedimento pode ser aplicado a qualquer equação genérica do tipo $x^2 + bx + c = 0$. Assim, quando o coeficiente de x^2 for diferente de 1, se faz necessário obter uma equação equivalente que satisfaça essa condição.

O primeiro passo desse procedimento consiste na fatoração da expressão:

$$x^2 + bx + c = (x - R)(x - S).$$

Dessa forma, temos que R e S são as raízes da equação. Aplicando a propriedade distributiva na forma fatorada, obteremos a expressão $x^2 - Rx - Sx + RS$, de onde concluímos que $R + S = -b$ e $R \cdot S = c$. Dois números somam $-b$ quando sua média é $-\frac{b}{2}$. Seja z uma quantidade desconhecida tal que $R = -\frac{b}{2} + z$ e que $S = -\frac{b}{2} - z$, teremos $R \cdot S = \left(-\frac{b}{2} + z\right)\left(-\frac{b}{2} - z\right) = \frac{b^2}{4} - z^2$. Logo, temos $c = \frac{b^2}{4} - z^2$. Uma vez descoberto o valor de z, podemos obter as raízes, que serão $-\frac{b}{2} \pm z$ (LOH, 2019, p. 2).

Para melhor compreendermos esse procedimento, tomemos como exemplo a equação $3x^2 - 18x - 48 = 0$. Primeiramente, devemos transformar o coeficiente de x^2 em 1. Para esse caso, basta dividirmos todos os termos da equação por 3, obtendo a equação equivalente $x^2 - 6x - 16 = 0$. Assim, as soluções serão os dois números cuja soma é 6 e o produto é -16. Dois números somam 6 quando sua média é 3, logo, as raízes procuradas são $3 + z$ e $3 - z$, onde z é um valor desconhecido. Também sabemos que o produto das raízes é -16, então $(3 + z)(3 - z) = 9 - z^2 = -16$, de onde teremos que $z = \pm 5$. Portanto, as raízes procuradas são $3 + 5 = 8$ e $3 - 5 = -2$.

Loh (LOH, 2019, p. 6) diz não ter encontrado, em suas pesquisas sobre a História da Matemática e o estudo das equações do segundo grau, um livro ou artigo que contenha esse método pedagógico e justifique, com precisão, as etapas. Entretanto, ele afirma que existem referências independentes que contêm as ideias-chave e podem ser adaptadas para o conseguir. Assim, é possível que outros matemáticos tenham observado esse método, porém não compartilharam suas descobertas ou, ainda, que os registros tenham se perdido.

De forma geral, os procedimentos descritos por Loh (2019) apresentam uma alternativa para resolução de equações do segundo grau que pode ser aplicada em qualquer equação, inclusive as com raízes complexas. Mais do que a memorização da fórmula, esse método proporciona a compreensão do raciocínio algébrico por trás dos procedimentos adotados.