UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

# REVISITANDO OS FORMALISMOS FRACIONÁRIOS DE RIEMANN-LIOUVILLE E CAPUTO: UMA PROPOSTA PARA ABORDAGEM NO ENSINO SUPERIOR

JONATHAN JORDÃO ALVES DE OLIVEIRA
DR. CRESUS FONSECA GODINHO

SEROPÉDICA
2022

JONATHAN JORDÃO ALVES DE OLIVEIRA

# REVISITANDO OS FORMALISMOS FRACIONÁRIOS DE RIEMANN-LIOUVILLE E CAPUTO: UMA PROPOSTA PARA ABORDAGEM NO ENSINO SUPERIOR

Monografia apresentada ao curso de Graduação em Física da UFRRJ, como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em física.

SEROPÉDICA
2022

JONATHAN JORDÃO ALVES DE OLIVEIRA

# REVISITANDO OS FORMALISMOS FRACIONÁRIOS DE RIEMANN-LIOUVILLE E CAPUTO: UMA PROPOSTA PARA ABORDAGEM NO ENSINO SUPERIOR

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Física da UFRRJ, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física sob a orientação do Prof. Dr. Cresus Fonseca de Lima Godinho.

Trabalho aprovado. Seropédica, 15 de Setembro de 2022:

**Prof. Dr. Cresus Fonseca de Lima Godinho**
Orientador

**Prof. Dr. Ion Vasile Vancea**
Convidado 1

**Prof. Dr. Isaías Gonzaga de Oliveira**
Convidado 2

**Prof. Dr. Ricardo José Scherer**
Suplente

SEROPÉDICA

2022

# *Conteúdo*

# *Agradecimentos*

Em primeiro lugar agradeço a Deus por tudo isso acontecer, desde da vaga na universidade até agora e por todo o suporte em toda essas batalhas na vida, onde foi com muita fé, foco, força de vontade, determinação entre outras coisas.

Agradeço aos meus pais, Maria e Geraldo, porém não posso esquecer de mencionar todos os meus familiares que sempre me apoiaram, incentivaram mesmo que alguns não concordaram muito com a decisão de fazer faculdade em física.

Agradeço também a todos os meus amigos em geral, mas quero destacar alguns como Nayton Vicentini, Wanderson Rosa, Thalita Bruna, Luana Miranda, Lucas Labre, Kaio Bass, Michel Xisto, Thalyta entre muitos outros que me ajudaram muito nessa jornada e me aturaram e tiveram bastante paciência em me ajudar nos momentos mais delicados como as disciplinas iniciais, mas também as outras pessoas que não citei não se preocupe por que vocês também fazem parte deste grupo onde me apoiaram bastante durante toda a graduação. Não posso esquecer de mencionar e agradecer muitíssimo a todos os professores do Departamento de Física por todo o apoio, orientações gerais que levarei para toda a vida, ajuda nas disciplinas, paciência e etc. Aos meus grandes amigos da Seleção universitária de Handebol e Futsal que considero como uma família Ruralina que são: Ronaldo Arias Hernandez, Amanda Bahia, Elionai Ribeiro, Vitor Carvalho, Matheus Abreu, Manuel Vitor, Bruno Burns entre outros que dá pra fazer uma lista bem extensa que me proporcionaram muitos momentos de alegria, foco, determinação entre outros motivos que me mantém no esporte e levo para sempre em minha vida em cada treino e aprendizado. A todos da IURD (Igreja universal do Reino de Deus) e da ABU (Aliança Bíblica universitária) pela compreensaão, apoio, suporte e etc.

Por fim quero agradeçer ao meu orientador Dr. Cresus Fonseca Godinho pela oportunidade, incentivo, orientações para que esse trabalho pudesse ser elaborado e realizado. Ao professores Claúdio Maia Porto, Marcelo Azevedo Neves, Ion Vancea e a todos os professores do departamento de física e de outros departamentos por tudo seja nos conselhos e ensinamentos que sem dúvidas levarei pra toda a vida.

# *Resumo*


Operadores de Derivadas e integrais fracionários são definidos como derivadas e integrais de ordem não inteira. O conceito de conceito de cálculo fracionário ou fracional, que significa mais geralmente integrais e derivadas de ordem arbitrária, seja real ou complexa foi uma questão que surgiu a partir de uma pergunta formulada pelo matemático francês Marquis de L'Hôpital a Wilhelm Leibniz: "O quê ocorreria com o operador derivada se a ordem deste fosse 0,5 ?"Ao que Leibiniz respondeu : "Esse é um paradoxo aparente, do qual consequências úteis serão estabelecidas".

Nosso trabalho revisita algumas definições clássicas de operadores de derivada e integral fracionários e aponta eventuais aplicações em áreas como a Engenharia, Física, dentre outras. Nosso objetivo é analisar a viabilidade de implementar esse conteúdo em um programa forma de graduação em Física. Entre estas definições iremos nos ater mais centralmente nas de Riemann - Liouville e Caputo, entretanto outras definições também são comentadas, contudo em nível menos profundo, são elas: Grünwald - Letnikov, Weyl, Marchaud, Jumarie, Hadamard, Chen e etc.

Nesse trabalho iniciamos com uma inspeção histórica do nascimento do cálculo fracionário, paralelos com o cálculo diferencial e alguns de seus desdobramentos são traçados. Focando sempre nas definições de Riemann-Liouville e Caputo, mais comumente encontradas na bibliografia da área e mais frequentes em trabalhos científicos. Alguns exemplos de sua operacionalidade são apresentados, como o cálculo direto de derivadas de função constante, função polinomial e função exponencial.

Também estudamos o formalismo variacional fracionário denominado FALVA [1], este obtido mais recentemente. Um paralelo com a função de dissipação de Rayleigh é traçado e ao final fazemos uma análise conclusiva sobre a viabilidade da implementação deste formalismo em um curso regular de graduação de Física.



**Palavras chave:** Cálculo Fracionário. Integrais e Derivadas Fracionárias. FALVA. Equação de Euler - Lagrange. Função de Dissipação de Rayleigh.


[1]FALVA: Fractional Actionlike Variation Approach

# *Abstract*

Derivative operators and fractional integrals are defined as derivatives and no-ninteger-order integrals. The concept of fractional calculus concept, means more generally integrals and derivatives of arbitrary order, whether real or complex was a question that arose from a question formulated by the French mathematician Marquis de L'Hôpital to Wilhelm Leibniz: "What would happen to the derived operator if its order was 0.5 ?"To which Leibiniz replied : "This is an apparent paradox, from which useful consequences will be established". Our work revisits some classical definitions of derivative operators and fractional integral and points out possible applications in areas such as Engineering, Physics, among others. Our goal is to analyze the feasibility of implementing this content in a degree form program in Physics. Among these definitions we will stick more centrally to those of Riemann - Liouville and Caputo, however other definitions are also commented, however at a less profound level, they are: Grünwald - Letnikov, Weyl, Marchaud, Jumarie, Hadamard, Chen and etc. In this work we begin with a historical inspection of the birth of the fractional calculus, parallels with the differential calculus and some of its developments are traced. Always focusing on the definitions of Riemann-Liouville and Caputo, more commonly found in the bibliography of the area and more frequent in scientific works. Some examples of its operability are presented, such as the direct calculation of constant function derivatives, polynomial function and exponential function.

We also studied the fractional variational formalism called FALVA, which was obtained more recently. A parallel with the Rayleigh dissipation function is drawn and at the end we make a conclusive analysis on the feasibility of implementing this formalism in a regular course of Physics graduation.

**Keywords:** Fractional Calculus, Integrals and Fractional Derivatives, FALVA, Euler's Equation - Lagrange, Rayleigh's Dissipation Function.

# 1 Introdução

O Cálculo Fracionário ou Fracional[1] hoje, tem sido motivo de estudos em todo o mundo, sendo considerado atualmente um assunto "quente" não por acaso, pode-se observar que o número de artigos publicados na área vem crescendo a cada ano. Considera-se que seu surgimento tenha ocorrido no ano de 1695, numa troca de correspondências entre Guillaume François Antoine, o Marquês de l'Hôpital e Gottfried Wilhelm Leibniz, isso durante o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral clássico. Nestas correspondências Leibniz questionou sobre uma possível generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária, l'Hôpital então questionou-o sobre o caso especial em que a ordem da derivada fosse $1/2$. A carta resposta, datada de 30 de setembro de 1695, apresentava uma reflexão acertada de Leibniz, na qual afirmava que consequências importantíssimas adviriam desses desenvolvimentos. Com o intuito de compreender melhor essa nova ferramenta, a partir do século XVIII, iniciam-se os estudos do Cálculo Fracionário, como os apresentados por Euler e Lagrange, sendo o último responsável por uma das propriedades mais úteis e elementares dentro do cálculo, fracionário ou não, conhecida como lei dos expoentes.

Entretanto somente no século seguinte o estudo desses objetos se deu de forma mais sistemática, tendo sido matemáticos como Laplace, Lacroix e Joseph Fourier os idealizadores das principais contribuições para o período. Até o ano de 1823 o Cálculo Fracionário ainda não havia sido aplicado a nenhum problema específico de matemática ou qualquer outra área do conhecimento, contudo neste ano, Niels Abel, matemático norueguês, conseguiu solucionar a equação integral fracionária do famoso problema da tautócrona com o formalismo do cálculo fracional CF, neste aparece uma integral de $1/2$.

Essa nova perspectiva da aplicação do Cálculo Fracionário fez com que vários autores desenvolvessem novas definições para derivadas e integrais de ordem fracionária nas déca-

[1]CF: Cálculo Fracional ou Fracionário

das subsequentes, contudo algumas dessas definições entraram em contradição aparentes entre si. Uma dessas definições, surgida ainda no século XIX; é a proposta por Liouville, que posteriormente foi reformulada por Riemann, promovendo uma importantíssima e talvez mais difundida definição denominada Derivada (e Integral) de Riemann-Liouville.

O período final do século XIX e o século XX foram particularmente importantes pois proporcionaram nomes de peso no desenvolvimento matemático da área, nomes como Grünwald, Letnikov, Caputo, Riesz, Weyl, Jumarie e outros, sendo que o maior desenvolvimento das aplicações do Cálculo Fracionário ocorreu a partir da década de 70, quando avolumou-se o emprego do CF nos mais diversos ramos da Ciência. Nestes anos o CF já havia sido aplicado em várias áreas, como: Biologia, Eletroquímica, Estatística, Reologia e Fenômenos de difusão . Em junho de 1974, ocorreu na Universidade de New Haven, nos Estados Unidos, a primeira conferência internacional sobre o CF. Posteriormente outra conferência sobre o assunto foi realizada na Universidade de Stratchclyde, em Glasgow, Escócia, no ano de 1984. A terceira aconteceu em 1989 na Universidade de Nihon, em Tóquio, Japão, dentre outras. Essas conferências surtiram grande efeito no estudo do CF, pois incentivaram vários novos pesquisadores, ao passo que motivara os já estudiosos. Pode-se perceber tamanho crescimento nesse campo tendo em vista que entre os anos 1975 até o ano 2000, mais ou menos 600 artigos sobre o assunto foram publicados. Desde então o aumento do interesse sobre o desenvolvimento e aplicação do cálculo de ordem arbitrária cresce exponencialmente no mundo, inclusive no Brasil. Um grande desafio no Cálculo Fracionário é conseguir uma representação geométrica deste, e isso vem sendo trabalhado por diversos autores renomados da área na atualidade, entre eles: Igor Podlubny, Tenreiro Machado, Lorenzo e Harttley. Estes dois últimos em 1998 conseguiram algo do tipo através de uma análise numérica utilizando a derivada de Grünwald-Letnikov . No Brasil, um dos pioneiros no estudo do Cálculo Fracionário foi o físico Aguinaldo Ricieri, que em 1993 mencionou algo sobre o CF em seus estudos. Existem ainda grupos de estudos no Paraná que surgiram no final do século XX, estes são formados por físicos liderados por Abilio Lenzi . Vários outros grupos existem no Brasil, como na Unicamp,Unesp, UFMG, CBPF, UFRRJ,UFSJ. A Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro UFRRJ tem uma linha de pesquisa ativa e bem estabelecida nessa área onde os professores Cresus F. de L. Godinho, Everton M.C. Abreu, Ion V. Vancea e J. Weberszpil tem trabalhos relavantes publicados nessa área, também com trabalhos de conclusão de curso finalizados e em andamento, incluindo este.

No Capítulo 1 iremos estudar como foi a história do cálculo fracional, como foi desenvolvido essa álgebra e os principais cientistas que contribuíram para a evolução do CF , também falaremos numa abordagem mais moderna dos operadores de ordem fracionária.

Já no Capítulo 2 iremos ver o núcleo central deste trabalho que são as introduções ao estudo das derivadas e integrais fracionárias como existem diversos tipos de operadores mas vamos explicar especificamente dois tipos que são de Riemann - Liouville e Caputo, com o intuito de compreender estas definições, enfatizaremos aqueles mais comuns na física.

Por fim, no capítulo 3 iremos destacar o principio variacional fracional, que hoje é bastante utilizado na Física o FALVA [2] como é conhecido, tem sido recorrentemente aplicado em diversos sistemas físicos para analisar problemas de teoria de campos, cosmologia, gravitação, além das áreas comuns já estudadas dentro deste formalismo.

O objetivo desse estudo é mostrar a viabilidade de implementar esse formalismo no ciclo básico de graduação, podendo estar alinhado à disciplina de métodos matemáticos ou mecânica analítica.

[2] FALVA: Fractional Action-Like Variational Approach

# 2 A Origem do Calculo Fracionário

Neste capítulo vamos abordar um pouco mais detalhadamente a questão histórica da evolução do cálculo fracional, e os principais acontecimentos que proporcionaram sua origem. Também iremos apresentar nesta seção uma interpretação matemática moderna do CF, utilizando os operadores diferenciais (derivadas e integrais) [1].

Iniciamos este tópico com uma motivação que irá nos ajudar a compreender esta parte inicial de estudo, tendo como ponto de partida o cálculo diferencial e integral. Seja $y = x^2$ e queremos saber qual é derivada desta função (Primeira derivada) que é $\dfrac{dy}{dx} = 2x$, e realizando novamente o processo de diferenciação temos como resultado $\dfrac{dy}{dx} = 2$ até esse ponto está tudo bem, porém não é o nosso objetivo, vamos avançar um pouco mais, ainda neste exemplo que é a nossa base de desenvolvimento, logo se o professor ou alguém realiza a seguinte pergunta: qual é a derivada dela sendo o índice $n$ valendo por exemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ entre outros?

Depois dessa pergunta você leitor(a) deve estar se perguntando como é possível derivar uma função qualquer como por exemplo polinômios, logaritmos, trigonométricas entre outras sendo o índice da notação diferencial não é um inteiro e sim uma fração, dizima períodica e etc.?

Então através dessa questão inicial que será o tema do nosso trabalho onde vamos descobrir como podemos derivar e integrar diversas funções utilizando o que chamamos de ordem não inteira ou ordem fracional, e entre outros assuntos que são extremamente importantes para a elaboração deste calculo.

Vamos entender essa questão em que iremos falar através dos paragrafos anteriores de como iremos montar esse operador numa certa ordem e daí em diante começar a ter uma noção do desenvolvimento da Algebra fracionária, ou seja partindo da idéia que a e-nésima derivada de uma função é descrita por $f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$, porém se pensarmos desta forma para um valor não inteiro temos que $f^{1/2}(x) = \frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$ onde $n$ é igual a $\frac{1}{2}$ por exemplo.

De acordo com o exemplo de motivação temos como principal pergunta " É possível que a n-ésima derivada de $y$ que definimos anteriormente como $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$ ser consistentemente definida com $n$ fracionário? e com esta questão, tiveram diveras pesquisas com o objetivo ser consistentemente definida com $n$ fracionário?, e com está questão tivemos diversas pesquisas com o objetivo de obter uma resposta pra esta pergunta e também saber se $n$ pode ser também um número irracional ou complexo?"[1]

Mas segundo essa carta escrita por L´Hôpital (1695) para Leibniz perguntando : *"E se $n$ for $\dfrac{1}{2}$ ? "*, que foi justamente a pergunta que fizermos anteriormente se for um número fracionário?, isto é ainda nesta questão que foi o estopim de um conjunto de estudos de cálculo fracional onde nessa mesma carta Leibniz respondeu *"Assim, segue-se que a derivada $\mathrm{d}^{1/2}x$ será igual à $x\sqrt{dx : x}$, entretanto isso é um paradoxo aparente de onde um dia serão obtidas consequências úteis"*, e foi levantado uma outra questão que é se fosse um número irracional ou complexo?" [1].

Porém não parou por aí, ainda nestas mesmas correspondências tendo a participação de outros matemáticos como Johann Bernoulli e John Wallis, com o objetivo de discutir a derivada de ordem geral que têm como função realizar o processo de derivação, ou seja não depende da ordem da derivada seja inteira, fracional, complexa entre outras utilizando o cálculo diferencial para chegar neste resultado que é $\dfrac{1}{2}\pi$, onde utilizamos a notação de derivada fracional de ordem $\dfrac{1}{2}$ e na forma diferencial como $d^{1/2}y$.

Depois destas cartas escritas e discutidas sobre os diversos assuntos que o tema foi crescendo aos poucos, que o cálculo fracionário (CF) chamou a atenção de diversos pesquisadores da época como Euler, Lagrange, Abel, Lacroix, entre outros que desenvolveram trabalhos que chamou a atenção da comunidade científica em que desde das correspondências em diante que o assunto se tornou bastante na área das ciências.

Vamos iniciar as séries de contribuições com Euler, onde em 1730 ele relacionou o indice de ordem inteira $n$ com $p$ que é uma função de $x$ que é dado por $\dfrac{d^n p}{dx^n}$.

Um pouco mais adiante 1772, J.L. Lagrange deu sua contribuição com a elaboração da chamada lei dos expoentes para operadores diferenciais de ordem inteira, sendo $m$ e $n$ índices de ordem inteira em que iremos expressar como:

---

[1]Onde $\mathbb{I}$ é o conjunto dos números irracionais e $\mathbb{C}$ é o conjunto dos complexos .

$$\frac{d^n y}{dx^n}\frac{d^m y}{dx^n} = \frac{d^{m+n} y}{dx^{m+n}} \,. \tag{2.1}$$

Onde essa expressão acima foi realizada devido a esta operação dada por:

$$\frac{d^n y}{dx^n}\frac{d^m y}{dx^n} = (\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n})y \,. \tag{2.2}$$

Já em 1812, Laplace definiu de maneira formal a derivada fracional através de uma integral que foi mencionada num trabalho realizado por Lacroix em 1819, onde nestas páginas do texto ele dedicou totalmente em obter a derivada de qualquer ordem.

Para obtermos um entendimento do trabalho de Laplace vamos exemplificar com a função $y = x^m$, onde $m$ é a ordem inteira da derivada. Então derivando sucessivamente esta função teremos:

$$y' = mx^{m-1} \,, \tag{2.3}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2} \,, \tag{2.4}$$

$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \,, \tag{2.5}$$

$\ldots$

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)x^{m-n} \,. \tag{2.6}$$

Analisando estas derivadas, mais especificamente a n-ésima derivada da função $y = x^m$, com o intuito de obtermos uma relação geral que será expressa entre $m$ e $(m-n)!$ que é expresso pela razão que é dada por:

$$\frac{m!}{(m-n)!} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)(m-n)...3.2.1}{(m-n)(m-n-1)...3.2.1}. \tag{2.7}$$

Onde $m!$ e $(m-n)!$ é expressa por :

$$m! = m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)(m-n)...3.2.1\,, \tag{2.8}$$

$$(m-n)! = (m-n)(m-n-1)...3.2.1\,. \tag{2.9}$$

Observando a equação (2.7) vemos que cada termo do numerador dado por $m!$ com cada termo do denominador que é expresso por $(m-n)$, em que alguns termos em comum serão cancelados por serem iguais e assim temos que

$$\frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)(m-2)(m-3) + ...(m-n+1)\,. \tag{2.10}$$

Ainda fazendo uma análise na expressão anterior, onde podemos perceber uma relação de recorrência para a derivada da função $y = x^m$ que cada vez que o $n$ diminui então $m$ será mantido.

Finalmente podemos escrever uma expressão generalizada da derivada da função $y = x^m$, e de acordo com as equações anteriores temos que:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}. \tag{2.11}$$

Onde esta relação é válida somente para $m \geq n$, e substituindo os índices $m$ e $n$ por números reais $\beta$ e $\alpha$ e também os fatoriais pela função gamma $(\Gamma)$ temos que:

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}\,. \tag{2.12}$$

Para os mais interessados nos detalhes da função gamma consulte [2]. Como próximo passo para esse desenvolvimento utilizaremos o chamado de símbolo de Legendre para o fatorial generalizado mais conhecido como a função Gamma $(\Gamma)$ que é definido por:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dt\,, \tag{2.13}$$

que tem como propriedade [2] :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\,, \\ \Gamma(n+1) &= n!\ .\end{aligned} \tag{2.14}$$

Então a nossa expressão geral da n-ésima derivada de ordem $n$ utilizando as propriedade acima :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}\,. \tag{2.15}$$

Para temos um entendimento dessa parte, ele dá um exemplo de aplicação da função Gamma para função $y = x$, $m = 1$ e $n = 1/2$ , portanto utilizando a definição da equação (2.15) temos que:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\,, \tag{2.16}$$

onde $\Gamma(0) = 1$ e $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Fourier também contribuiu para o desenvolvimento da derivada fracionária, definindo-a por meio de operadores fracionários a partir da representação integral (transformada de Fourier) de $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)cos[p(x-\alpha)]d\alpha dp\ , \tag{2.17}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} cos[p(x-\alpha)]dp\ . \tag{2.18}$$

Liouville contribuiu também no CF e publicou em três longas memórias, onde muitas dessas publicações tiveram muito sucesso tanto nas definições para determinados problemas e quanto na parte das aplicações.

O principal objetivo no desenvolvimento de Liouville foi o resultado das derivadas de ordem inteira que definimos como:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}\,. \tag{2.19}$$

Aqui $m$ é um inteiro positivo, $D$ é chamado de operador diferencial que é definido como $D^n y = \dfrac{d^n}{dx^n} y$ e por último $a$ é uma constante qualquer que será utilizada numa ideia de derivação de ordem arbitrária que é descrita como

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}\,, \tag{2.20}$$

$\nu$ significa o índice de ordem arbitrária.

Ele assumiu que a derivada de ordem arbitrária, visto anteriormente da função $f(x)$ pode ser expandida expandida que é numa série de potências descrita por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}\,. \tag{2.21}$$

Esta série é válida para $\mathbb{R}(a_n) > 0$, isto é a parte real dos coeficientes é maior do que zero, e como próximo passo vamos utilizar o operador diferencial que vimos na expressão (2.20) na equação (2.21) teremos como resultado :

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}\,. \tag{2.22}$$

Onde a equação anterior é conhecida como a primeira fórmula de Liouville para derivada fracionária, onde podemos generalizar para uma derivada de ordem arbitrária $(\nu)$, onde $\nu$ pode ser qualquer número: racional, irracional ou complexo,mas há uma desvantagem sobre esta expressão que é na questão de aplicação em que só pode ser aplicada só para funções do tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{ax}$.

Como foi dito no parágrafo anterior que a primeira formulação de Liouville tivesse limitações mas não impediu de no desenvolvimento de outros trabalhos como por exemplo a segunda formulação onde nela temos uma integral bastante conhecida e vimos inicialmente que é a função gamma, logo temos que a equação é escrita como:

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du \,, \tag{2.23}$$

esta expressão é válida para $a > 0$ e $x > 0$.

O próximo passo para a resolução dessa formulação é utilizar uma mudança de variáveis em que $t = xu$ mas no caso queremos isolar a variável $u$ com o intuito de realizar a mudança e também é a diferencial do problema, logo isolando $u$ temos que $u = \frac{t}{x}$, então derivando $u$ temos $du = \frac{dt}{x}$, portanto a integral anterior temos que:

$$I = x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \ , \tag{2.24}$$

fazendo uma análise da equação (2.24) temos um resultado bastante conhecido que é a definição integral da função Gamma, portanto reescrevendo a integral observamos que

$$I = x^{-a} \Gamma(a) \,, \tag{2.25}$$

e também podemos isolar o termo $x^{-a}$ da expressão anterior como:

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I \ , \tag{2.26}$$

em que $I$ é a integral que estavamos resolvendo inicialmente (2.23).

Dando Continuidade ao desenvolvimento a $2^a$ definição iremos utilizar o operador diferencial de ordem inteira ($D^\nu$) em ambos os lados da equação (2.26) e utilizando o resultado da acima,

$$D^\nu x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} D^\nu (e^{-xu}) du \ , \tag{2.27}$$

com o objetivo de resolver a integral acima, utilizaremos o conceito operacional de derivadas inteiras para obtermos uma expressão generalizada e assim extrapolarmos a idéia para o caso fracionário de ordem $\nu$ que pode ser inclusive racional, irracional ou até complexo,

$$D^1(e^{-xu}) = -ue^{-xu}\,, \tag{2.28}$$

$$D^2(e^{-xu}) = u^2e^{-xu}\,, \tag{2.29}$$

$\vdots$

$$D^m(e^{-xu}) = (-1)^m e^{-xu}\,. \tag{2.30}$$

A expressão acima pode ser generalizada para algum expoente fracionário, o que nos remete à forma $D^\nu(e^{-xu}) = (-1)^\nu e^{-xu}$, com $\nu$ evidentemente racional. Portanto encontramos

$$D^\nu x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}[(-1)^\nu e^{-xu}]du\,, \tag{2.31}$$

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a+\nu-1}e^{-xu}du\,. \tag{2.32}$$

Potanto, a segunda definição da formulação de Liouville da derivada fracionária é portanto

$$D^\nu x^{-a} = (-1)^\nu \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}\ , \tag{2.33}$$

ambas as formulações apresentadas possuem restrições, a $1^a$ só é permitida para funções do tipo considerado em (2.21), e a $2^a$ é útil somente para funções do tipo $x^{-a}$ com $a > 0$. Portanto podemos dizer que essas definições são restritas a um pequeno número de funções.

Diferentes definições de operadores fracionários foram apresentadas com diferentes domínios de atuação e utilidade. Uma definição foi a generalização do caso da integral utilizada Lacroix e Abel para funções do tipo $x^a\ , a > 0$, a outra foi a definição de Liouville, está útil para o caso de $x^{-a}\ , a > 0$. William Center observou que a derivada de uma constante não era zero de acordo com o método de Lacroix-Peacock, para isso ele utilizou a unidade $x^0$ mantendo $m = 0$ que pelo método de Lacroix no cálculo de derivadas arbitrária de indice $n = \frac{1}{2}$ (ainda que Lacroix tenha assumindo $m \geq n$) e acarretando como resultado: [3]

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x^0}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{-1}{2}}\,, \tag{2.34}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x^0}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,, \tag{2.35}$$

utilizando a segunda definição de Liouville :

$$D^{\frac{1}{2}}x^{-a} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)}x^{-(a+\frac{1}{2})}\,, \tag{2.36}$$

onde o índice de ordem fracionária é $\nu = \frac{1}{2}$ .

Logo Center tomou o limite quando $a \to 0^+$ e daí concluiu que tomando o $\lim\limits_{a \to 0^+} = \infty$ temos que :

$$D^{\frac{1}{2}}x^0 = \lim_{a \to 0^+} D^{\frac{1}{2}}x^{-a} \tag{2.37}$$

$$D^{\frac{1}{2}}x^0 = \lim_{a \to 0^+} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)}x^{-(a+\frac{1}{2})} = 0\,. \tag{2.38}$$

Porém ele não conseguiu ter uma conclusão de qual deles é a correta, então ele afirmou que estas duas expressões acima impõe num dilema ao fato do entendimento de $\frac{d^u x^0}{dx^u}$, e quando tivesse as respostas concretas daí o problema será resolvido.

Voltando a falar de Liouville onde foi o pioneiro na questão da resolução das equações diferenciais utilizando operadores diferenciais com o intuito de compreender a existência de uma função complementar descrita numa EDO do tipo $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ que possui uma solução complementar $(y_c)$ descrita por $y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{n-1}x^{n-1}$, onde $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ são os coeficientes de $(y_c)$.

Seja $u$ um índice qualquer então utilizando a equação diferencial ordinária do tipo $\frac{d^u y}{dx^u} = 0$ poderia existir uma solução correspondente para esta equação porém na publicação sobre a solução complementar $(y_c)$ gerou muitas desconfianças e confusões na teoria de operadores fracionários.

Estas publicações dos artigos tratando da função complementar representado por $(\psi(x))$, e foram elaborados pelos matemáticos Peacock e Greathead, mas o que chamou a atenção devido à questão da indeterminação desta função foi Greathead.

G.F.Bernhard Riemann também contribuiu na questão de uma teoria de integração fracionária, contudo ele não fez publicações em vida, suas contribuições foram publicadas após sua morte onde foi publicado na suas obras completas em obras coletadas "Gesamelte Werke [1892]". Em sua abordagem, ele procurou uma generalização da Serie de Taylor e obteve como resultado

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt + \psi(x)\,, \tag{2.39}$$

ele identificou na expressão acima uma ambiguidade no limite de integração $c$, então Riemann adicionou $\psi(x)$ como uma função complementar que foi essencial na tentativa de mostrar o desvio da lei dos expoentes, como por exemplo nesta lei que mencionamos que é expressa como:

$${}_cD_x^{-\mu}\, {}_cD_x^{-\nu} f(x) = {}_c D_x^{-\mu-\nu} f(x)\,. \tag{2.40}$$

Esses dois operadores de ordens arbitrárias ${}_cD_x^{-\mu}$ e ${}_cD_x^{-\nu}$ podem ser expressos como:

$${}_cD_x^{-\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^x (x-t)^{\mu-1} f(t)dt + \psi(x)\,, \tag{2.41}$$

$${}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt + \psi(x)\,. \tag{2.42}$$

Onde os argumentos $c$ e $x$ no operador diferencial são limites de integração nas equações acima que é válido quando o limite inferior $c$ é igual, contudo ele ficou preocupado com essa medida do desvio para o caso em que ${}_cD_x^{-\mu}\, {}_{c'}D_x^{-\nu} f(x)$, ou seja quando $c \neq c'$.

A existência da função complementar troxe muitas dúvidas e questionamentos na comunidade científica, por que queriam uma explicação mais clara e objetiva sobre a necessidade desta função , a solução para a resolução do problema a priori foi retirar $\psi(x)$ das equações acima, já que as justificativas de alguns matemáticos não surtiram o efeito necessário que justificasse a sua manutenção .

Liouville em 1832 e depois Hargreave em 1848 escreveram sobre e-nésima derivada do produto, generalizado assim a regra de Leibniz, onde $n$ é um inteiro positivo, numa forma moderna a expressão é dada por:

$$D^{\nu}[f(x)g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} D^n f(x) D^{\nu-n} g(x)\,, \tag{2.43}$$

sendo que $D^{\nu}$ é o operador diferencial ordinário de ordem $n$, $D^{\nu-n}$ é também um operador diferencial só que fracional e por fim $\binom{\nu}{n}$ é chamado de coeficiente binomial generalizado que é dado por $\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}$. Expressões mais modernas e generalizadas da regra de Leibniz podem ser encontradas em [1], aliás essa bibliografia apesar de já ser considerada antiga, ainda hoje é frequentemente lembrada em trabalhos científicos e teses.

Sonin escreveu um artigo sobre as *On differential with arbitrary index* (diferenciais de indices arbitrários), considerado talvez o trabalho mais recente fazendo menção à definição de Riemann-Liouville, neste trabalho que teve como objetivo terminar aquela questão anteriormente falada sobre o tipo de operador diferencial fracionário que Riemann tentou formular. O destaque principal do trabalho de Sonin foi a fórmula integral de Cauchy da e-nésima derivada que é expressa por [10]

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta\,, \tag{2.44}$$

não há problema em se generalizar $n!$ para valores não inteiros desde que podemos considerar $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$. Contudo para valores não inteiros de $n$ o integrando deixa de ter polos e passa a ter um ponto de ramificação, o que requereria um corte desse ramo. Essa análise todavia não faz parte do trabalho de Sonin e Letnikov ainda que eles o mencionem [5]. Foi contudo H. Laurent em 1884 que publicou um trabalho que possibilitou que a teoria de operadores fracionários alcançasse um nível compatível para se consolidar de forma a permitir um ponto de partida para o que conhecemos hoje mais modernamente.

A questão principal de Laurent também foi a fórmula integral de Cauchy, onde o contorno $c$ foi um circuito aberto sobre uma superfície Riemanniana ao contrario do circuito fechado de Sonin e Letnikov. portanto o método de integração do contorno produz a definição

$$_{c}D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt\,. \tag{2.45}$$

Onde a parte real $Re(\nu) > 0$, esta integral é para uma ordem arbitrária, mas quando

$x > c$ na equação anterior, temos a definição de Riemann mostrada na equação anterior, mas sem a função complementar $\psi(x)$ e numa versão mais usada ocorre quando $c = 0$, isto é:

$$ {}_0D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \,, \tag{2.46} $$

aqui a parte real $Re(\nu) > 0$, e desta forma a integral fracionária que muitas vezes é descrita como a integral fracional de Riemann - Liouville.

Uma condição suficiente para ocorrer a convergência em relação à equação anterior serão classificada como as funções de classe de Riemann expressa como :

$$ f\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^{1-\varepsilon}) \tag{2.47} $$

Onde essa função é válida para $\varepsilon > 0$, e como exemplo de funções desta classe são as constantes e funções do tipo $x^a$ para $a > -1$.

Enquanto o outro tipo de função é quando o $c$ está em menos infinito, ou seja a equação de Riemann - Liouville é expressa por:

$$ {}_{-\infty}D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \tag{2.48} $$

Onde a parte real $\mathbb{R}(\nu) > 0$ e temos que uma condição suficiente para que ocorra a convergência de acordo com a equação anterior será classificada como as funções de classe de Liouville expressada como:

$$ f(-x) = O(x^{-\nu-\varepsilon}) \tag{2.49} $$

Onde essa função é válido para $\varepsilon > 0$ e $x \to \infty$, e um exemplo de funções desta classe são as funções do tipo $x^{-a}$ para $a < \nu > 0$, porém se $-1 < a > 0$ e dependendo dos valores de $\nu$, então poder haver uma união das classes.

Onde esta relação só é válida para valores reais de $a$ e serem maiores que zero, ou seja $\mathbb{R}(a) > 0$.

Hermann Weyl também contribuiu bastante no CF num artigo onde ele define um outro tipo de integral fracional expressa por:

$$ {}_{x}W_{\infty}^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{x}^{\infty}(t-x)^{\nu-1}f(t)dt \tag{2.50} $$

Onde esta integral é válida para a parte real de $\nu$ ser maior que zero, ou seja $\nu > 0$.

Parindo da definição da equação (2.50) e realizando uma mudança de variável, onde $t = -\tau$ então $dt = -d\tau$, logo a integral será:

$$ {}_{-\infty}D_{\infty}^{-\nu}f(x) = -\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{\infty}^{-x}(x+\tau)^{\nu-1}f(-\tau)d\tau \tag{2.51} $$

Tomando $x = -\xi$, então a expressão (2.51) se torna:

$$ {}_{-\infty}D_{-\xi}^{-\nu}f(-\xi) = -\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{\xi}^{\infty}(\tau-\xi)^{\nu-1}f(-\xi)d\tau \tag{2.52} $$

Onde se deixarmos $f(-\xi) = g(\xi)$ na equação, então a expressão anterior no lado direito da equação de Weyl escrita na equação (2.52) deste trabalho , logo temos:

$$ {}_{-\infty}D_{-\xi}^{-\nu}g(\xi) = -\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{\xi}^{\infty}(\tau-\xi)^{\nu-1}g(\xi)d\tau\ . \tag{2.53} $$

Em 1823 o eminente matemático Niels Henrik Abel apresentou o alicerce para o que seria a motivação para o uso do cálculo fracional. Ele possibilitou o que hoje é tida como a aplicação do formalismo no problema de obter o formato da curva onde o instante de tempo que leva para a descida de uma massa, na ausência de atrito, deslizando para baixo de tal curva somente sob ação da gravidade independe do ponto de origem dessa massa. Abel demonstrou que tal curva é a tautócrona, e a equação integral de Abel $k$ é dada por [6]:

$$ k = \int_{0}^{x}(x-t)^{-1/2}f(t)dt\,, \tag{2.54} $$

o fator $(x-t)$ é o "kernel"ou núcleo , $-1/2$ é o indice de ordem não-inteira representado por $\alpha$ e por fim $f(t)$ é a função a determinar.

Já em nível mais contemporâneo, o matemático Michele Caputo utilizou o CF na área da Engenharia para estudar viscoelasticidade e a sismologia 1967, onde teve um excelente resultado pois conseguiu resolver estes problemas utilizando derivadas e integrais fracionais e teve aplicações em outras áreas do conhecimento chamando a atenção do meio científico, mais detalhes serão apresentados sobre seu formalismo mais adiante [11].

Neste capítulo apresentamos de forma suscinta e resumida algumas idéias que possibilitaram o desenvolvimento do CF, como se originou esse nome e os seus principais acontecimentos. Hoje existem muitas definições e propostas modernas para um cálculo fracionário e até definições de derivadas deformadas ou conformáveis, diversos artigos científicos e livros abrangendo inúmeras aplicações em engenharia, física, biologia, vicoelasticidade, reologia dentre outras áreas. Nosso objetivo aqui entretanto não é tão audacioso, como próximo passo iremos apresentar no próximo capítulo o que entendemos serem duas das definições frequentemente utilizadas em artigos científicos, apresentaremos de forma um pouco mais destacada as definições de Riemann-Liouvile e a de Caputo, esta útlima com menos ênfase, já que decorre da primeira como uma mera integração por partes. Não podemos nos distanciar contudo da proposta original de nosso trabalho que foi estudar o formalismo de cálculo fracional para verificar a viabilidade de sua implementação no currículo de graduação de física, muito provavelmente de forma coadjuvante no curso de métodos matemáticos de física.

# 3 *As Definições dos Operadores Fracionais Segundo Riemann - Liouville e Caputo*

Nesse Capítulo iremos enfatizar duas das principais definições de derivada fracionária (Riemann - liouville e Caputo), e apresentaremos as motivações para seu uso em algumas importantes áreas de pesquisa.

Existem várias outras definições que não iremos definir tais como Grünwald - Letnikov, Jumarie, Marchaud, Chen entre outros, mas o foco do nosso trabalho é sobre RL e Caputo. [1]

## 3.1 A Integral Fracional de Riemann - Liouville

Antes de entrarmos no assunto propriamente dito iremos reelembrar o que dissemos lá no início deste capítulo da história do cálculo fracionário quando falamos da definição de Riemann - Liouville onde graças a já citada fórmula de Cauchy, escrita como:

$$ {}_{c}^{RL}D_{x}^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \,. \tag{3.1} $$

Mas quando $\alpha$ é de ordem não inteira e os limites de integração ($a$ e $x$), a equação será dada por:

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{-\alpha} [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(x) dx \,. \tag{3.2} $$

Onde a expressão acima é denominada Integral fracional de Riemann - Liouville

[1]RL: Riemann - Liouville.

(IFRL).

Outra notação que é comumente utilizada para a IFRL é:

$$ {}_aI_x^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a \tag{3.3} $$

Daqui em diante utilizaremos essa notação para Integral fracionária de Riemann - Liouville.

Vamos apresentar algumas propriedades da IFRL que serão essenciais e úteis para resolução dos exercícios deste assunto.

$$ aI_x^{\alpha}(cf(x)) = c[{}_aI_x^{\alpha}(f(x))]\,, \tag{3.4} $$

$$ aI_x^{\alpha}(f(x) \pm g(x)) = {}_aI_x^{\alpha}(f(x)) \pm_a I_x^{\alpha}(g(x))\,, \tag{3.5} $$

$$ aI_x^{\alpha}({}_aI_x^{\beta} f(x)) = {}_aI_x^{\alpha+\beta}(f(x))\,. \tag{3.6} $$

Agora iremos explicar melhor essas propriedades acima :

1. A primeira propriedade temos uma constante vezes a Integral de Riemann - Liouville de ordem $\alpha$, em que podemos tirar a constante pra fora do operador diferencial e se torna o que vimos anteriormente;
2. Como segunda propriedade que temos a soma e a diferença de Integrais de ordens $\alpha, \beta$, em que temos como resultado a soma é a diferença de operadores de índices diferentes;
3. E a última propriedade temos a soma de ínidices $(\alpha, \beta)$ numa Integral fracional de Riemann - Liouville, terá como resultado a IFRL da soma de índices;

Mas os leitores podem estar se perguntando como podemos realizar uma operação de multiplicação de integrais fracionais de Riemann - Liouville de ordens diferentes?

Para responder esta questão iremos nesse momento mostrar o desenvolvimento para chegarmos no resultado da equação (3.6).

Partiremos da definição da IFRL apresentada em (3.3), e na sequência consideramos a ação de outro operador respeitando a definição da integral Riemann - Liouville, neste caso de ordem $\beta$ na equação acima, e assim podemos escrever

$$ {}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}[{}_aI_x^{\beta}f(t)]dt\,, \tag{3.7} $$

reescrevendo a equação acima determinando ${}_aI_x^{\beta}f(t)$ ficamos com:

$$ {}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\xi)^{\beta-1}f(\xi)d\xi\right]\,, \tag{3.8} $$

observe que a expressão acima temos aqui duas constantes $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ e $\frac{1}{\Gamma(\beta)}$, que não dependem da variável $t$. Portanto podemos tirar ambas as constantes fora da integração, isto é realizar o mesmo procedimento que foi realizado na primeira propriedade da IFRL, logo teremos como resultado uma integral dupla fracional expressa por:

$$ {}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}f(\xi)d\xi dt\,, \tag{3.9} $$

nesta expressão acima as integrais existem para funções $f$ pertencentes ao intervalo de integração $[a, b]$, então podemos utilizar a definição do Teorema de Fubini para trocar a ordem de integração e temos que:

$$ {}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_\xi^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}f(\xi)d\xi dt\,, \tag{3.10} $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\xi)d\xi\int_\xi^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}dt\,. \tag{3.11} $$

Analisando a equação acima observamos que o termo em parênteses $(x-t)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}$ é semelhante à uma mesma expressão de modo que um produto que possui $-t$ e no outro temos $+t$, mas fica a questão como podemos proceder sobre o produto de funções de indices fracionários ?

Para ser respondida está questão vamos realizar uma mudança de variáveis com o intuito que a expressão que estamos resolvendo se torne mais simples de solucionar, logo fazendo $dt = \xi + s(x-\xi)$, então derivando-a teremos $dt = d\xi - sd\xi$, porém podemos reescrever a variável $dt$ como $dt = (1-s)d\xi$, então a nova integral será:

$$\begin{aligned} {}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_0^1 f(\xi)(x-(\xi+s(x-\xi))^{\alpha-1}(\xi+s(x-\xi) \\ &- \xi)^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}dsd\xi\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

a expressão acima pode ser reesrita, após as simplificações como:

$${}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_0^1 f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}dsd\xi. \tag{3.13}$$

$${}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-\beta-1}d\xi\right)\left(\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds\right). \tag{3.14}$$

Fazendo uma análise da expressão acima temos um resultado bastante conhecido no cálculo fracional que é $\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds$ que é denominada função beta de Euler $B(\alpha,\beta)$ que é definido como:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds\,, \tag{3.15}$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}\,, \tag{3.16}$$

e substituindo esta informação e retornando a integral acima temos que:

$${}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}\left(\int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-\beta-1}d\xi\right)\,, \tag{3.17}$$

$${}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-\beta-1}d\xi\,. \tag{3.18}$$

mas de acordo com a expressão anterior essa é a definição da IFRL de indices $\alpha$ e $\beta$ somados, logo:

$$
{}_aI_x^{\alpha}[{}_aI_x^{\beta}f(x)] = {}_a I_x^{\alpha+\beta}f(x)\,. \tag{3.19}
$$

Onde ${}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x)$ é expressa como:

$$
{}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-\beta-1}d\xi\,.
$$

Este Resultado que chegamos é a nossa terceira propriedade da integral fracional de Riemann - Liouville.

## 3.2 A Derivada Fracional de Riemann - Liouville

Avançaremos um pouco mais nos estudos de caráter fracionário na parte das definições segundo Riemann - Liouville, tentaremos destacar as suas características que serão essenciais para este estudo, assim como as aplicações em que se ela se faz útil.

A definição de uma derivada fracional de RL se baseia na questão da derivação fracional que é um operador inverso ao da integração fracionária, onde no caso da derivada iremos utilizar o operador diferencial que vimos anteriormente no primeiro capítulo, em que será inverso a esquerda da integral fracionária, ou seja:

$$
\frac{d}{dt}If(t) = f(t)\,, \tag{3.20}
$$

porém, do cálculo diferencia básico se entende que:

$$
I[f'(t)] = \int_0^t f'(t_1)dt_1\,, \tag{3.21}
$$

e consequentemente

$$
I[f'(t)] = f(t) - f(0)\,. \tag{3.22}
$$

Mas se consideramos F que é uma função primitiva de $f(t)$, então temos que a primitiva da integral da função será expressa por:

$$
\frac{d}{dt}If(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f'(t_1)dt_1 \tag{3.23}
$$

$$\frac{d}{dt}If(t) = \frac{d}{dt}[F(t) - F(0)] \tag{3.24}$$

$$\frac{d}{dt}If(t) = f(t)$$

Também podemos considerar a lei dos expoentes que vimos na introdução do cálculo fracional neste trabalho, onde temos as ordens inteiras $m$ e $n$ e os operadores diferenciais onde é definido como $D = \dfrac{d}{dx}$.

Agora iremos analisar a derivada de Riemann- Liouville em intervalos finitos num eixo real de ordem $\alpha$, onde iremos ter uma noção do que é a derivada nos extremos, isto é a derivada à esquerda e a derivada à direita.

Vamos considerar $y$ ou $f(x) \in AC^n[a,b]$ com $-\infty < a < b < \infty$. Sejam $\alpha \in C$ com $Re(\alpha) \geq 0$ e $\alpha \neq \mathbb{N}$. Logo as derivadas fracionárias segundo formalismo de Riemann-Liouville tanto a esquerda $D_{a^+}$ e a direita $D_{a^-}$ num intervalo finito do eixo real, definidas por $D^{\alpha}_{a^+}y$ e $D^{\alpha}_{a^-}y$ serão definidas por [13]

$$(D^{\alpha}_{a^+}f(x)) = (\frac{d}{dx})^n(I^{n-\alpha}_{a^+}f(x))\,, \tag{3.25}$$

e

$$(D^{\alpha}_{b^-}f(x)) = (\frac{-d}{dx})^n(I^{n-\alpha}_{b^-}f(x))\,. \tag{3.26}$$

Onde $[\alpha]$ é denominada a parte inteira de $\alpha$ isto é $Re(\alpha)$ em que é definido o n como $n = [\alpha] + 1; x > a$ e $n = [\alpha] + 1; x > b$.

É importante dizer que de acordo com derivada fracional de Riemann - Liouville expressa nas duas equações acima, no caso de ordem real é equivalente a derivada de ordem arbitrária de uma integral arbitrária.

Uma grande questão que todos estão se perguntando é em ambas as expressões acima das derivadas fracional de RL a esquerda a direita contem esses dois termos que são $I^{n-\alpha}_{a^+}f(x)$ e $(I^{n-\alpha}_{b^-}f(x)$ o que significam e como determinar eles?

A resposta para esta questão que ambas variáveis são chamadas de operadores de integração que nada mais é que a chamada Integral fracional de Riemann - Liouville (IFRL) em que iremos ver neste trabalho, logo elas são expressas por:

$$I_{a^+}^{n-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{n-\alpha+1}}dt\,, \;\; x > a \tag{3.27}$$

$$I_{b^-}^{n-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{n-\alpha+1}}dt\,, \;\; x < b \tag{3.28}$$

então adicionando a definição da IFRL na expressão da derivada de Riemann - Liouville temos que:

$$(D_{a^+}^{\alpha}f(x) = (\frac{d}{dx})^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha+1}dt\,, \;\; x < a \tag{3.29}$$

$$(D_{b^-}^{\alpha}f(x) = (-\frac{d}{dx})^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b (x-t)^{n-\alpha+1}dt\,, \;\; x < b\,. \tag{3.30}$$

Vamos considerar agora $\alpha \in \mathbb{N}$ então se $n$ que definimos lá no início deste trabalho como a ordem da derivada neste caso inteira, ou seja $\alpha = n \in \mathbb{N}$ teremos nas derivadas tradicionais onde vimos nos cursos de cálculo diferencial e integral definidas em limites no infinito, portanto [13]

$$(D_{a^+}^{n}f(x)) = f^n(x)\,, \tag{3.31}$$

e

$$(D_{b^-}^{n}f(x)) = (-1)^n f^n(x)\,, n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.32}$$

Onde $f^n(x)$ é a e-nésima derivada da função $f(x)$, em que quando $\alpha = 0$, a expressão então se torna:

$$(D_{a^+}^{0}f(x)) = D_{b^-}^{0}f(x)\,, \tag{3.33}$$

e como resultado, retornamos à mesma função $f(x)$.

Quando fazemos uma mudança no intervalo mas considerando o semi-eixo teremos a derivada de Liouville, onde de acordo com a DFRL num intervalo não infinito iremos considerar $x < 0$, $\beta \in \mathbb{C}$, $n$ o menor valor inteiro que seja maior que $\mathbb{R}(\alpha) > 0$ e $\mathbb{R}(\beta) > 0$, onde $n - 1 \leq \mathbb{R}(\beta) < n$ e $\beta = n - \alpha$ e $0 < \mathbb{R}(\alpha) \leq 1$. Agora considerando $f(x) \in AC^n$ nos intervalo $(a, b)$ com $-\infty < a < b < +\infty$. Portanto as derivada de Riemann - Liouville a direita e a esquerda será

$$(D^{\alpha}_{0+}f(x)) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n-\alpha}_{0+}f(x)\,, \tag{3.34}$$

e

$$(D^{\alpha}_{0-}f(x)) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n-\alpha}_{0-}f(x)\,, \tag{3.35}$$

a integral fracionária das expressões acima são dadas por:

$$I^{n-\alpha}_{0+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{n-\alpha+1}}dt\,, \tag{3.36}$$

e

$$I^{n-\alpha}_{0-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{n-\alpha+1}}dt\,, \tag{3.37}$$

onde $n = \mathbb{R}(\alpha)+1, \mathbb{R}(\alpha) \geq 0$ e $x < 0$. Uma propriedade importante no estudo da DFRL (Derivada Fracional de Riemann - Liouville) é a soma dos índices que mostramos no início do capítulo sobre a lei dos expoentes no cálculo fracional, portanto o que faremos aqui é bem similar ao do inicio do capítulo. Seja dois indices $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{*}_{+}$, logo as equações se tornam:

$$I^{\alpha}_{a_+}I^{\beta}_{a_+}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{a_+}f(x)\,, \tag{3.38}$$

e

$$I^{\alpha}_{b_-}I^{\beta}_{b_-}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{b_-}f(x)\,. \tag{3.39}$$

Também há a propriedade da subtração de indices que é válida num intervalo fechado $[a, b]$ sendo $\alpha$ e $\beta$ indices, para $\alpha > \beta > 0$ temos que:

$$D^{\beta}_{a_+}I^{\alpha}_{a_+}f(x) = I^{\alpha-\beta}_{a_+}f(x)\,, \tag{3.40}$$

e

$$D^{\beta}_{b_-}I^{\alpha}_{b_-}f(x) = I^{\alpha-\beta}_{b_-}f(x)\,. \tag{3.41}$$

Quando Benoit Mandelbrot discutiu o problema do movimento browniano em seu livro "The Fractal Geometry of Nature"já apresentava inúmeras relações entre o cálculo diferencial e a integral de Riemann-Liouville. Desde a última década, muitos trabalhos em que processos de modelagem em equações diferenciais , estudos sobre difusão, propagação de ondas, estudos em reologia, processos de relaxação dentre outros são abordados com o formalismo fracionário de Riemann-Liouville. É sabido hoje que sistemas com graus de amortecimento podem ter um tratamento mais refinado se o cálculo fracional for empregado. Hoje, há extensões inclusive contempladas pelo cálculo variacional fracional, tema a ser abordado mais para frente, possibilitando incursões até em áreas como Física da matéria condensada e Teoria Quântica de Campos. E nesse sentido a definição de Riemann-Liouville possivelmente seja uma das mais revisitadas pelos autores.

## 3.3 Derivada Fracional de Caputo

Nesta seção iremos definir as integrais e derivadas de acordo com o cientista Michele Caputo que através nas definições de Riemann - Liouville e as princípais características e comparações entre as definições apresntadas.

No contexto histórico, Caputo utilizou a sua definição com aplicação na área da Engenharia que é a viscoelasticidade e a sismologia que teve um excelente resultado porque conseguiu resolver estes problemas utilizando os operadores fracionais desenvolvidas por Caputo, com isso teve diversas aplicações em outras áreas do conhecimento, com isso atraiu os olhares de vários cientistas da época que tiveram vantagens que serão discutidas nesta seção.

Vamos definir a derivada fracionária de Caputo (DFC) de ordem fracional $\alpha$, com $n-1 < \mathbb{R}(\alpha) \leq n$ por:

$$ {}_{C}D^{\alpha}(t) = D^{\alpha} f(t)\,, \tag{3.42} $$

e

$$ {}_{C}D^{\alpha}(t) = I^{n-\alpha}[D^{n} f(t)]\,. \tag{3.43} $$

Onde $D^n$ é a derivada de ordem inteira e $I^{n-\alpha}$ é a integral fracional de Riemann - Liouville.

Dando continuidade nas definições segundo Caputo que as derivadas fracionais tanto à esquerda quanto à direita com $\alpha > 0$ [2], isto é $\alpha \in \mathbb{R}$. então temos que [4]

[2]Lembrando que $\alpha$ é o índice de ordem fracional

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_x^\alpha f(x) &= {}_a I_x^{n-\alpha} D_x^n f(x)\,, \\
{}_x^C D_b^\alpha f(x) &= {}_a I_x^{n-\alpha} D_x^n f(x)\,.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Logo a definição de Caputo segundo as expressões acima serão expressas por:

$$
{}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^n(u)}{(x-u)^{\alpha-n+1}} du\,, \tag{3.45}
$$

e

$$
{}_a^C D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^n(u)}{(u-x)^{\alpha-n+1}} du\,. \tag{3.46}
$$

Onde ambas as equações são válidas para $n = [\alpha] + 1$ , $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , $a \in \mathbb{R}$ e também como informação importante que ambas as expressões possuem o termo $f^n(u)$ que é chamada de derivadas ordinárias de ordem $n$ . Como consequência desta definição acima, eles são classificados como operadores não locais, ou seja as derivadas à esquerda $[{}_a^C D_x^\alpha f(x)]$ e a direita $[{}_x^C D_b^\alpha f(x)]$ vão depender de seus respectivos valores tanto à esquerda quanto à direita de $x$ ($a \leq u \leq x$, $x \leq u \leq b$), mas se a derivada de Caputo estiver num instante $t$, então teremos que o valor do operador terá dependência númerica da função neste instante.

Agora iremos ver algumas propriedades desse tipo de operador que envolverá as integrais fracionárias .

Iniciando com está propriedade que temos que para qualquer valor de $\alpha$ com $\alpha < 0$, isto é $\alpha$ valor real para toda função $f$ no intervalo $[a, b]$ e para algumas equações, logo temos como resultados [4] :

$$
\begin{aligned}
{}_a D_x^\alpha [{}_a I_x^\alpha] f(x) &= f(x)\,, \\
{}_x D_b^\alpha [I_x^\alpha] f(x) &= f(x)\,, \\
{}_a^C D_x^\alpha [{}_a I_x^\alpha] f(x) &= f(x)\,, \\
{}_x^C D_b^\alpha [{}_x I_b^\alpha] f(x) &= f(x)\,.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

No próximo capítulo a título de comparação, iremos fazer o cálculo da derivada fracionária mediante as definições de Caputo e Riemann - Liouville para as mesmas funções em questão.

Também não podemos deixar de deixar de mostrar uma propriedade que é na verdade um teorema que é bastante conhecido no cálculo diferencial que é o Teorema fundamental do cálculo (TFC), no caso em questão do Teorema Fundamental do Cálculo de Caputo (TFCC) que significa que quando $0 < \alpha < 1$ e a função $f(x)$ for diferenciável no intervalo $[a, b]$. Logo podemos escrever

$$\begin{aligned} {}_xI_a^{\alpha}[{}_x^C D_a^{\alpha}]f(x) &= f(b) - f(a)\,, \\ {}_xI_b^{\alpha}[{}_x^C D_b^{\alpha}]f(x) &= f(a) - f(b)\,, \end{aligned} \tag{3.48}$$

E como a última propriedade temos a derivada de Caputo de uma função polinomial (potência), então seja uma função do tipo $f(x) = (x-a)^{\beta}$ com $\beta < 0$ , portanto aplicando a definição de Caputo conclui-se

$${}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \tag{3.49}$$

$${}_xD_b^{\alpha}(x-b)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(b-x)^{\beta-\alpha} \tag{3.50}$$

Quando $\beta = 0$ o operador de Caputo será nulo, logo fazendo uma observação deste caso as derivadas de Caputo no intervalo $0 < \alpha < 1$ que vimos anteriormente só vale para potências do tipo $\beta \leq 0$.

Se $\beta > 0$ então a definição de Caputo no caso na integral diverge, ou seja não existe a definição de Caputo neste caso [4].

Nesse capítulo apresentamos a definição de derivada fracional de acordo com M. Caputo. Essa abordagem se mostra diferente já no caso em que efetuamos a derivada de uma função constante, que não é zero para RL e dá zero para Caputo. Hoje também se encontram muitos trabalhos centrados nessa abordagem, que permite desde o estudo de equações diferenciais fracionais, problemas sismologicos e de crescimento populacional. O contraste entre as duas definições apesar de parecer pequeno, submete-nos a um raciocínio de que como o formalismo matemático pode proporcionar variação na análise de nossa realidade, sendo alterado tão sutilmente.

# 4 Operacionalização do Cálculo Fracionário e FALVA.

## 4.1 Cálculos Diretos

Neste capítulo iremos utilizar o cálculo fracionário para tratar alguns exemplos com o objetivo de ter uma melhor compreensão de sua utilidade em pesquisa.

Também iremos estudar um método variacional que sem dúvidas utilizará estas definiç que é chamado de FALVA

Vamos iniciar nossa série de exemplos de como realizar os cálculos utilizando as definições dos operadores fracionais com a DFRL de uma constante arbitrária $c$, onde $c\epsilon\mathbb{R}$, e no final terá um resultado surpreendente e algumas características.

Seja $f(x) = c$ (função contante), onde $c \in \mathbb{R}$, $\alpha$ o indice de ordem fracional e $n = 1$. Determine a DFRL dessa função.

Primeiramente iremos aplicar a definição da derivada fracional de Riemann - Liouville que é dado por:

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[ {}_aI_x^{n-\alpha} f(x) \right]$$

e

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \,.$$

Aplicando os dados do problema na definição acima temos que

$$D^{\alpha}(c) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (c) dt \,, \tag{4.1}$$

realizando o método de substituição simples, isto é fazendo $u = x - t$, então derivando em relação a $t$ temos que $du = -dt$ , mas nesse mesmo procedimento iremos fazer uma mudança nos limites de integração em que:

- Quando $t = a$, então temos que $u = x - a$;
- Quando $t = 0$, então temos que $u = 0$;

logo, reescrevendo a equação (3.24) adicionando estas novas infromações teremos que:

$$D^{\alpha}(c) = \frac{d}{dx}\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x-a} u^{-\alpha} du \,, \tag{4.2}$$

agora iremos resolver esta integral para que em seguida possamos realizar o processo de derivação, portanto temos

$$D^{\alpha}(c) = \frac{d}{dx}\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left.\frac{u^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right|_{x-a}^{0} \,, \tag{4.3}$$

substituindo os limites de integração na expressão acima temos que:

$$D^{\alpha}(c) = \frac{d}{dx}\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left[0 - \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] \tag{4.4}$$

$$D^{\alpha}(c) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \,, \tag{4.5}$$

depois que realizamos a Integral de Riemann - Liouville, agora iremos derivar este resultado acima para que possamos ter um resultado geral da DFRL da função constante, então ficamos com

$$D^{\alpha}(c) = -\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}}{1-\alpha}\right) \,, \tag{4.6}$$

e fazendo uma simplificação no numerador e denominador do termo $(1-\alpha)$, temos que o operador de RL de uma constante generalizada é dada por

$$D^{\alpha}(c) = -\frac{c(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \,. \tag{4.7}$$

Seja ainda $f(t) = c$, porém agora de acordo com a definição de Caputo

$$ {}_a^C D_x^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-n+1} \left( \frac{d^n}{dt^n}(c) \right) du \, , \tag{4.8} $$

observamos imediatamente que a derivada dentro do integrando é nula, que por si só já mostra diferença entre os dois formalismos.

Dando continuidade nos exemplos de DFRL vamos agora para uma função polinômial do tipo $f(x) = x^n$ .

Para começar este exemplo vamos utilizar uma outra definição que é utilizada nas derivadas fracionais segundo RL que é o operador à direita, mas pode-se utilizar tanto a definição geral, à esquerda entre outras, isto é são notações utilizando então escolha à que for mais conviniente para você leitor(a), logo temos que:

$$ D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha+1} f(t) dt \, . $$

Substuíndo os dados do problema na definição acima temos que:

$$ {}_0D_+^{\alpha}[x^n] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} t^n dt \, , \tag{4.9} $$

analisando está expressão acima temos $(x-t)^{-\alpha}$ e $t^n$ e antes de realizarmos qualquer método de integração, vamos ajeitar um pouco,isto é vamos colocar o termo $x^{\alpha-1}$ em evidência e com isso obtemos

$$ {}_0D_+^{\alpha}[x^n] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x x^{\alpha-1} \left( 1 - \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} t^n dt \, , \tag{4.10} $$

agora faremos uma mudança de variáveis utilizando o método de substituição para esta integral, então seja $u = t/x$ , logo derivando em relação a $t$ temos $du = dt/x$, mas precisamos de uma relação dessas variáveis, então podemos reescrever $t$ em termo de $u$ como $t = xu$ onde $dt = xdu$, e mais um detalhe antes de reescrever a integral que é necessitamos realizar uma alterção nos limites de integração por que a expressão que estamos resolvendo está na variável $t$ onde

- Fazendo $t = a$ temos que $u = \frac{a}{x}$;

- Fazendo $t = x$ temos que $u = 1$;

dando continuidade no exemplo, reescrevendo a expressão obtendo esses dados

$$D^{\alpha}_{a^+}[x^n] == \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{\frac{a}{x}}^{x}(1-u)^{\alpha-1}(xu)^n x du\,, \tag{4.11}$$

fazendo uns ajustes dentro da integral passamos agora a

$$ {}_0D^{\alpha}_{+}[x^n] = \frac{x^{n+1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{\frac{a}{x}}^{x}(1-u)^{\alpha-1}u^n du\,. \tag{4.12}$$

Esta integral é bastante peculiar podendo ser escrita atravéz de uma outra já conhecida, trata-se da função beta que é definida como

$$\beta(q,p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-z)^{q-1}dt\,.$$

Onde $p$ e $q$ podem ser expresso através da comparação da definição de $\beta$ com a integral que estamos calculando, então fazendo $n = p-1$, então $p = n+1$, enquanto $q-1 = -\alpha$ logo temos que $q = n-\alpha$, logo a soma é dada por $p+q = n-\alpha+2$, mas ainda precisamos calcular a função beta para substuirmos na integral acima darmos prosseguimento no exemplo, logo determinando $\beta$ substuindo os dados temos que:

$$\beta(n+1, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+2)}\,, \tag{4.13}$$

voltando ao exemplo utilizando o dado acima no operador de Riemann - Liouville teremos

$$ {}_0D^{\alpha}_{+}[x^n] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}x^{n+1-\alpha}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+2)}\,, \tag{4.14}$$

agora iremos derivar esta expressão em relação a $x$, depois de ter realizado o processo da integral, logo temos que:

$$ {}_0D^{\alpha}_{+}[x^n] = \frac{n-\alpha+1}{\Gamma(1-\alpha)}x^{n-\alpha}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+2)}\,, \tag{4.15}$$

fazendo as simplificações temos que a DFRL à direita da função é dada por

$$ {}_0D^{\alpha}_{+}[x^n] = \frac{(n-\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+2)}x^{n-\alpha}\,. \tag{4.16}$$

Agora vamos utilizar deste exemplo genérico para calcular a DFRL de $f(x) = x^2$ para $\alpha = 1/2$ e $n = 2$.

Então utilizando a equação (4.16) substituíndo esses dados temos que:

$$ {}_0D_+^{\frac{1}{2}}[x^2] = \frac{(2-\frac{1}{2}+1)\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+2)} x^{2-\frac{1}{2}} \,, \tag{4.17} $$

calculando a expressão acima temos que:

$$ {}_0D_+^{\frac{1}{2}}[x^2] = \frac{\frac{5}{2}\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{3}{2}} \,, \tag{4.18} $$

Usando $\Gamma(3) = 2! = 2$ e $\Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}$ podemos escrever que

$$ {}_0D_+^{\frac{1}{2}}[x^2] = \frac{\frac{5}{2}.2}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} x^{\frac{3}{2}} \,, \tag{4.19} $$

e fazendo as simplificações temos que a DF segundo Riemann - Liouville desta função é dada por:

$$ {}_0D_+^{\frac{1}{2}}[x^2] = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} \,. \tag{4.20} $$

Agora iremos realizar exemplos de integrais fracionais de Riemann - Liouville com o objetivo do leitor(a) ter um entendimento melhor sobre o assunto e com isso ficar mais simples e fazer a correlação da teoria e a prática.

Seja $f(x) = x^n$ de ordem $\alpha$ e $n = 1$ . Calcule ${}_aI_x^{\alpha}[f(x)]$ .

Primeiramente iremos aplicar a definição da IFRL, para que em seguida possamos resolvê-la, logo:

$$ {}_aI_x^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \,, $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} x^n dt \,. \tag{4.21} $$

Substituindo os dados do problema na definição da Integral de RL temos que:

$$ {}_aI_x^\alpha(x^n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^n dt \,, \tag{4.22} $$

observe que nessa expressão acima temos $(x-t)^{\alpha-1}$ e $t^n$ e antes de realizarmos qualquer método de integração vamos arrumar um pouco melhor esta expressão,ou seja vamos colocar o termo $x^{\alpha-1}$ em evidência e com isso teremos:

$$ {}_aI_x^\alpha(x^n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^n dt \,, \tag{4.23} $$

fazendo a mudança de variáveis $u = t/x$, derivando em relação a $t$ obtemos que $du = dt/x$, reescrevendo $t$ como $t = xu$ e tomando $dt = xdu$, e por fim ajeitando os limites de integração

- Fazendo $t = a$ temos que $u = \frac{a}{x}$;
- Fazendo $t = x$ temos que $u = 1$;

continuando nosso desenvolvimento, reescrevendo a expressão obtendo esses dados temos que :

$$ {}_aI_x^\alpha(x^n) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a}{x}}^x (1-u)^{\alpha-1} (xu)^n x du \,, \tag{4.24} $$

observando a integral acima na expressão pode-se notar mais uma vez a semelhança com a função Beta $\beta$

$$ \beta(q,p) = \int_0^1 t^{p-1} (1-z)^{q-1} dt \,, $$

fazendo a análise na expressão podemos identificar $\beta$ como:

$$ \beta(n+1,\alpha) = \int_{\frac{a}{x}}^1 u^n (1-u)^{\alpha-1} \,, \tag{4.25} $$

onde na expressão de $\beta$ vimos que $p = n+1$ quando $n = p-1$ enquanto $q = \alpha$ quando $q - 1 = \alpha - 1$.

Calculando a função beta dada pela relação dela com a função Gamma

$$\beta(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

obtemos

$$\beta(n+1,\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \tag{4.26}$$

voltando agora para a expressão da IFRL da função $f(x) = x^n$, adicionando a informação da função beta temos que :

$$_aI_x^{\alpha}(x^n) = \frac{x^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \tag{4.27}$$

Fazendo simplificações na expressão temos que a integral fracional da função $x^n$ generalizada é obtida por:

$$_aI_x^{\alpha}(x^n) = \frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+1+\alpha)}\ . \tag{4.28}$$

Depois que vimos no exemplo uma função mais geral possível, vamos a um exemplo dado uma função $f(x) = x^2$ (função do segundo grau), $n = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Calcule a IFRL desta função.

Vamos utilizar o resultado que achamos no exemplo anterior e colocar os dados do problema, para que em seguida possamos resolvê-la então temos que :

$$_aI_x^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{x^{2+\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(2+1+\frac{1}{2})}\ , \tag{4.29}$$

$$_aI_x^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})}\ , \tag{4.30}$$

$$_aI_x^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}}\ . \tag{4.31}$$

Onde usamos $\Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}$ e fazendo as simplificações temos que a Integral fracional da função $f(x) = x^2$ é expressa por:

$$
{}_aI_x^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{15\sqrt{\pi}} \,. \tag{4.32}
$$

Fazendo uma observação dos tópicos das derivadas de Riemann - Liouville vimos que a derivada de uma contante não é igual a zero e sim um valor diferente de zero, e ae que está a característica marcante, a vantagem de se utilizar as derivada de Caputo e o seu grau de importância em relação à RL.

Vamos ver mais exemplos utilizando as propriedades do operador de Caputo.

- 1. Seja $f(t) = t^2$ uma função potência de ordem $\alpha = \dfrac{1}{2}$, Calcule a Derivada de Caputo dessa função no intervalo $t\epsilon[0, 1]$.
- 2. Seja $f(x) = (x-2)^2$, uma função polinomial de grau 2 de ordem $\beta = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Determine o operador segundo Caputo dessa função no intervalo $x\epsilon[1, 2]$.

Resolvendo o primeiro exemplo inicialmente vamos reescrever a definição da DFC, e em seguida colocar os dados do problema, portanto temos que :

$$
{}_a^CD_x^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^n(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \,,
$$

$$
{}_0^CD_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = \frac{1}{\Gamma(2-\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{f^2(t^2)}{(x-t)^{\frac{1}{2}-2+1}} dt \,, \tag{4.33}
$$

Onde $f^2$ é a derivada segunda da função também pode ser escrita como $\frac{d^2}{dt^2}$.

Depois que substituimos os dados do enunciado neste primeiro exemplo agora iremos resolvê-la, logo temos que:

$$
{}_0^CD_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 \frac{2}{(x-t)^{-\frac{1}{2}}} dt \,, \tag{4.34}
$$

$$
{}_0^CD_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = \frac{1}{(\frac{\sqrt{\pi}}{2})} \int_0^1 2(x-t)^{\frac{1}{2}} dt \,, \tag{4.35}
$$

Onde $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, e dando prosseguimento no exemplo temos que:

$$ {}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (x-t)^{\frac{1}{2}} dt \,. \tag{4.36} $$

Agora iremos resolver esta integral acima utilizando o métoddo de integração que é o de substituição simples para solucionarmos esse exemplo. Seja $u = x - t$, então a derivada de $u$ em relação a $t$ será $du = -dt$, porém quantos du's temos na integral 1 dt e positivo, então multiplicando ambos os lados por $(-1)$ temos que $-du = dt$, porém temos que mudar os limites de integração já que os valores estão definidos na variável $t$, logo temos que:

- Para $t = 1$, temos que $u = x - 1$ ,
- Para $t = 0$, temos que $u = x$ ,

retornando ao exemplo, substituíndo as informações acima temos que:

$$ {}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{x-1}^{x} u^{\frac{1}{2}} (-du) \,, \tag{4.37} $$

$$ {}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{x-1}^{x} u^{\frac{1}{2}} (du) \,, \tag{4.38} $$

vamos integrar $u$ e voltar a variável original e em seguida substituir os limites de integração, logo:

$$ {}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \,, \tag{4.39} $$

$$ {}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left. \frac{(x-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_x^{x-1} \,, \tag{4.40} $$

$$ {}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{2}{3} (x-t)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_x^{x-1} \,, \tag{4.41} $$

substituindo os limites de integração temos que :

$$ \frac{2}{3}(x-t)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x-(x-1))^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x-x)^{\frac{3}{2}} \,, \tag{4.42} $$

$$\frac{2}{3}(x-t)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,, \tag{4.43}$$

voltando a expressão original e adicionando o resultado do limites de integração temos que :

$${}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = -\frac{8.(x-1)^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}\,, \tag{4.44}$$

então, a Derivada de Caputo de ordem $\alpha = 1/2$ da função $f(t) = t^2$ é:

$${}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = -\frac{8(x-1)^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}\,, \tag{4.45}$$

ou também podemos reescrever este resultado como:

$${}_0^C D_1^{\frac{1}{2}}(t^2) = -\frac{4\left(2(x-1)^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}\right)}{3\sqrt{\pi}}\,, \tag{4.46}$$

já no segundo exemplo iremos utilizar a última propriedade que é da função polinomial do tipo $(x-a)^{\beta}$ para valores de $\beta > 0$, logo reescrevendo a DFC temos que

$${}_a D_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\,,$$

substituindo os dados do problema na equação acima temos que:

$${}_1 D_2^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}(x-2)^{2-\frac{1}{2}}\,, \tag{4.47}$$

$${}_1 D_2^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{1}{2})}(x-2)^{\frac{3}{2}}\,, \tag{4.48}$$

com $\Gamma(3) = 2!$ que é igual a 2, e $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, portanto substuindo os resultados no exemplo temos como resultado a DFC da função $(x-2)^{\frac{1}{2}}$ é dado por

$${}_1 D_2^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x-2)^{\frac{3}{2}}\,. \tag{4.49}$$

Esses dois exemplos mostram o funcionamento operacional desses operadores fracionais. Procuramos apresentar um efeito comparativo entre as derivadas de Riemann - Liouville e Caputo. Para isso procuramos utilizar as mesmas funções e o resultado foi bastante semelhante, logo podemos dizer neste exemplo são equivalentes os operadores fracionários.

## 4.2 FALVA

Nesta seção apresentaremos de forma breve o formalismo variacional fracional conhecido como *Fractional Actionlike Variation Approach* ou simplesmente FALVA [14]. Esse formalismo é realizado por um funcional de ação, definido à luz de uma integral fracional de Riemann-Liouville. Evidentemente podemos também implementar o procedimento variacional em um funcional de ação tradicional, entretanto nutrido de derivadas fracionais ao invés das tradicionais derivadas temporais.

A abordagem do método FALVA é classificada em dois casos, o primeiro em uma dimensão (1-D) que é quando há derivadas fracionais do tipo Riemann - Liouville, e o segundo caso na definição de Cresson [14].

Explicando o primeiro caso do FALVA (1-D) temos como base o espaço de configurações do sistema [1] numa certa estrutura matemática denominada variedade $(M)$ de dimensão $n$, iremos definir a integral de ação fracional como

$$S^{\alpha}[q](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x L(\dot{q}(\tau), q(\tau), \tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \,. \tag{4.50}$$

Onde $\dot{q} = \dfrac{dq}{d\tau}$ é a notação temporal da derivada , $\alpha$ é o índice de ordem fracional $(0 < \alpha < 1)$, $L(\dot{q}(\tau), q(\tau), \tau)$ é a função lagragiana, $t \in [a,t]$ é o tempo intrínseco enquanto $\tau \in [a,b]$ é o tempo do observador.

Extremizando o funcional fracional de ação (4.50)

$$\delta(S^{\alpha})f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \delta(L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau)) d\tau \,, \tag{4.51}$$

onde variação da Lagragiana em relação as coordenadas generalizadas é obtida por

$$\delta L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \,, \tag{4.52}$$

[1] Espaço de Configuração do Sistema: É o espaço de cada coordenada generalizada em certo instante de tempo num plano de eixos coordenados.[16]

e portanto,

$$\delta S^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] (t-\tau)^{\alpha-1} \delta \tau \,, \tag{4.53}$$

com

$$\delta S^{\alpha} = 0 \,, \tag{4.54}$$

fazendo uma integração por partes no termo $\dfrac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$

$$\int_t^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{d\tau} (\delta q)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \tag{4.55}$$

Onde a variação de $q$ é expressa por $\delta q = \dfrac{d}{d\tau}(\delta q)$. Dando então sequência na conta encontramos

$$\int_t^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{d\tau} (\delta q)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \int_a^t d \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\alpha-1} \delta q \right] - \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\alpha-1} \right] \delta q d\tau \,, \tag{4.56}$$

tomando as restrições (condições de contorno) na superfície para $\delta q$ nos pontos $aet$ temos que $q(a) = q(t) = 0$, portanto temos que o primeiro termo da integral é nulo, restando a segunda parte da integral descrita por:

$$\int_t^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{d\tau} (\delta q)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = - \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\alpha-1} \right] \delta q d\tau \,, \tag{4.57}$$

agora iremos resolver a equação acima para que no final agrupar todos os resultados numa integral completa.

$$- \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\alpha-1} \right] \delta q d\tau = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\alpha-1} \delta q + (\alpha-1)(t-\tau)^{\alpha-2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \,, \tag{4.58}$$

dando agora prosseguimento no exemplo vamos reescrevê-la mudando o sinal, e portanto ficamos com

$$- \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\alpha-1} \right] \delta q d\tau = - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\alpha-1} \delta q + (\alpha-1)(t-\tau)^{\alpha-2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \tag{4.59}$$

Depois que realizamos o método de integração podemos, reunir os resultados que obtvemos ao longo do desenvolvimento. Portanto temos que a Variação da IFRL utilizando o FALVA é dado por:

$$ {}_tI_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\alpha - 1}{t - \tau} \right] (t - \tau)^{\alpha - 1} \delta q \tag{4.60} $$

Lembrando que estamos tomando a variação da integral e é igual à zero, então o que iremos fazer é reescrevê-lá e com isso temos um resultado muito importante nesta seção que é dada por:

$$ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\alpha - 1}{t - \tau} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \tag{4.61} $$

A equação acima é conhecida como a Equação de Euler-Lagrange fracionária, obtida utilizando o método FALVA.

O significado do fator referente ao formalismo fracional $\left( \frac{\alpha - 1}{t - \tau} \right)$ pode ser imediatamente associado a uma grandeza chamada força de dissipação de Rayleigh, formalismo esse, idealizado com o objetivo de poder escrever as equações de Euler-Lagrange para sistemas mecânicos sob ação de uma força dissipativa específica do tipo $\mathbb{F} = \frac{1}{2} k_{ij} {v^2}_{ij}$ em qualquer sistema de coordenadas generalizadas, onde $k_{ij}$ é uma constante e ${v^2}_{ij}$ é a velocidade. Após refazermos o princípio de d'Alambert para o caso em que tais forças estão presentes [16], obtemos uma nova composição para as equações de Euler-Lagrange onde:

$$ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \tag{4.62} $$

Onde $\mathbb{F}$ é a conhecida função de dissipação de Rayleigh. Podemos oberservar que há uma relação bem estreita entre as equações (4.61) e (4.62) onde o termo de dissipação e o termo oriundo da fracionalidade estão desempenhando papéis similares, o que nos conduz ao raciocínio de que o formalismo fracional é bastante conveniente para tratar tais sistemas onde forças dissipativas estão presentes.

# 5 Conclusão e Perspectivas Futuras

O Cálculo Fracionário já se consolidou como uma ferramenta útil e poderosa, principalmente para uma revisão, ou reformulação da descrição de fenômenos físicos que não respeitam os paradigmas tradicionais ancorados no cálculo diferencial integral ou apresentados pelas equações diferenciais da Física. No intuito de apresentar essa idéia de forma mais concisa, neste trabalho apresentamos um resumo histórico do CF e revisitamos duas definições consideradas talvez como as mais importantes, Riemann-Liouville e Caputo. Apresentamos exemplos de sua aplicabilidade aplicando-as por exemplo no cálculo de derivada e integral fracionais de uma constante e da função polinomial.

Ainda fazemos uma explanação acerca do método variacional fracional, conhecido como FALVA, muito empregado em trabalhos recentes de Física, Matemática e Engenharia. Esse formalismo se mostra muito útil para reproduzir o equivalente fracional da equação de Euler - Lagrange e se mostra muito útil no tratamento de sistemas turbulentos e viscosos.

Há uma extensa linha de possibilidades a serem trabalhadas, como as equações diferenciais, transformadas de Laplace e Fourier, análise funcional e outras extensões no cálculo fracional que já serviram de base para inúmeros trabalhos científicos.

Esperamos com esse trabalho, realizado por um aluno em final de graduação, ajude a mostrar a viabilidade de se implementar o Cálculo Fracional para um estudo mais amplo no ciclo de graduação de Física. Os métodos matemáticos, e as aplicações além de serem abrangentes e ricas servem para trazer mais variedade no estudo de problemas físicos, além dar ao curso de Física um caráter mais contemporâneo no que diz respeito ao que vem sendo feito pela comunidade científica internacional.

Portanto, Como possíveis perspectivas nesta linha de desenvolvimento propomos o Cálculo fracional numa aprendizagem do ensino superior, talvez associada à disciplina de Métodos matématicos e dar continuidade no estudos dos operadores fracionais e sua possíveis aplicações na física , utilizar o CF no eletromagnetismo, mecânica do contínuo, mecânica clássica, etc.

# *Referências*


[1] Miller, S. K, and Ross. B. An Introduction to the Fracional Calculus and Fractional Differential Equations,John Wiley and Sons Inc. New York, (1993).

[2] Arfken, G. Mathematical Methods for Physicists, Academic Press New York, London (1967)

[3] Varalta, N. Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado à equação logística (Dissertação), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Botucatu - SP, 2014.

[4] Santos, J. Aplicação do Cálculo Fracionário na Modelagem da Memória e da Aprendizagem, Universidade Federal do Rio Grande (UFRG), Rio Grande - BA, 2015

[5] Camargo, F. D. R, Cálculo fracionário e aplicações , Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica Campinas - SP, 2009.

[6] Ramos, P. F.; Camargo, F. D. R, Cálculo fracionário aplicado ao problema da Tautócrona, Universidade Estadual de São Paulo (UNESP), Bauru - SP.

[7] Ortigueira, M. D.; Machado, J. A. T. What is a fractional derivative? (Article) Journal of Computational Physics, v.293, p.4-13, 2015.

[8] Oliveira, E. C.; Machado, J. A. T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. Mathematical Problems in Engineering, p. 1-6, 2014.

[9] Teodoro, G. S. ; Oliveira, E. C. Derivadas fracionárias: critérios para classificação. Revista Brasileira de Ensino de Física (RBEF), v.37, n.3,p. 1-12,2015.

[10] Vieira, D. S. Equações de Difusão e o Cálculo fracionário (Tese de Dissertação), Universidade Estadual de Maringá (UEM), Centro de Ciências Exatas (CCE), Departamento de Física (DFI), Programa de Pós-Graduação em Física (PFI), Maringa - PR, 2015.

[11] Caputo, M. Linear models of dissipation whose q is almost frquency independent-ii"Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, vol.13, no.5.pp. 529-539, 1967.

[12] Carvalho, D. M. Introdução ao Cálculo Fracionário com Aplicações. Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJR)

[13] Teodoro, G. S.; Oliveira, D. S.; Oliveira, E. C.; Sobre derivadas fracionárias (on fractional derivatives). Revista Brasileira de Ensino de Física (RBEF), no.2, vol.40, 2018.

[14] El-Nabulsi, R.A. and Torres, D.F.M.; Fractional actionlike variation problems, Journal of Mathematics Physics (AIP) vol.49, 2008.

[15] Godinho, C.F.L. et al; Variational Procedure for Higher-Derivative mechanical models in a fractional integral vol. 129, 2020.

[16] Lemos, N.A.; Mecânica Analítica, Editora livraria da Física - São Paulo (SP) 2ed, 2007.