

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
LICENCIATURA EM FÍSICA

EQUAÇÕES DE CAMPO DA GRAVITAÇÃO E A INFLAÇÃO  
CÓSMICA

LUCAS HAIASHI LIMA

SEROPÉDICA  
2021

Lucas Haiashi Lima

## **EQUAÇÕES DE CAMPO DA GRAVITAÇÃO E A INFLAÇÃO CÓSMICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - Departamento de Física, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Gabriel Santos Menezes.

Seropédica, Agosto de 2021

LUCAS HAIASHI LIMA

## Equações de Campo da Gravitação e a Inflação Cósmica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
junto ao Curso de Licenciatura em Física da  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
- Departamento de Física, como requisito parcial  
à obtenção do título de Licenciatura em Física.

Trabalho aprovado em Seropédica, Agosto de 2021.



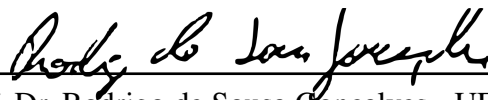
---

Prof. Dr. Gabriel Santos Menezes  
Orientador



---

Prof.Dr. Ion Vasile Vancea - UFRRJ  
Convidado 1



---

Prof. Dr. Rodrigo de Sousa Gonçalves - UFRRJ  
Convidado 2

*À Helenita*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe, principal apoiadora incondicional durante todos os anos de graduação, por toda ajuda e suporte para conclusão desta etapa.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gabriel Menezes por todos os anos de estudo e por todos os ensinamentos que me permitiram escrever este trabalho e que, certamente, serão os fundamentos das próximas jornadas acadêmicas. Agradeço também a todos os professores, em especial ao professor Claudio, com os quais tive o prazer de ser aluno e de aprender lições que me acompanharão por toda a minha carreira.

À Júlia, pelo apoio e suporte emocional fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos meus vizinhos e companheiros de ecovila Giovanna, Rayssa, Robson, Carol e Vivian pelos melhores períodos da minha estadia em Seropédica.

Aos meus companheiros de república Gabriel e Isabela, por todos os momentos de descontração, diversão e convivência.

À Matheus e Luana, pela imensurável troca de conhecimento e aprendizagem que me propiciaram. Além de toda ajuda na confecção deste trabalho.

Às minhas colegas de graduação Wanessa e Roberta, que em muito me ajudaram nas mais diversas tarefas e responsabilidades ao longo desses anos.

À Ana Carolina, por todo companheirismo e apoio nos mais diversos âmbitos.

A todos que contribuíram de forma direta e indireta na confecção deste trabalhos e da minha graduação.

*“Nós precisamos saber, e nós iremos saber”*

David Hilbert

# Resumo

O presente trabalho tem por objetivo, inicialmente, o estudo e desenvolvimento das teorias da relatividade especial e geral, apresentando o ferramental matemático necessário para tal. Após esta etapa preliminar, visamos o estudo do modelo cosmológico baseado nas equações de Friedmann. Em seguida, enunciaremos os problemas que surgem no modelo cosmológico e apresentamos a teoria da inflação cósmica, inicialmente concebida por Guth no início da década de 80, desenvolvendo de forma simples a teoria do campo escalar e a quebra espontânea de simetria. Após isto, introduzimos a teoria de Linde com o slow-roll do campo escalar, no que ficou conhecido como nova inflação.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE ESPECIAL</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1	As Bases da Relatividade Especial . . . . .	5
2.2	Transformações de Lorentz . . . . .	6
2.3	Consequências cinemáticas das Transformações de Lorentz . . . . .	10
2.3.1	Contração do comprimento . . . . .	11
2.3.2	Dilatação temporal . . . . .	11
2.4	Espaço-tempo de Minkowski . . . . .	12
2.4.1	Tensores . . . . .	12
2.4.1.1	Tensor métrico . . . . .	14
2.4.1.2	Levantar e Abaixar Índices . . . . .	15
2.4.1.3	Transformações de coordenadas . . . . .	15
2.4.2	Descrição do Espaço . . . . .	16
2.4.3	Diagramas de Minkowski . . . . .	17
2.5	Mecânica Relativística . . . . .	19
<b>3</b>	<b>PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE GERAL</b> . . . . .	<b>23</b>
3.1	Princípio de Equivalência . . . . .	23
3.2	Princípio de Covariância Geral . . . . .	24
3.3	Interação Gravitacional . . . . .	25
3.4	A conexão em função da métrica do espaço . . . . .	26
3.5	Potencial Gravitacional . . . . .	30
3.6	Derivada Covariante . . . . .	31
3.6.1	Derivada covariante ao longo de uma curva . . . . .	33
3.6.2	Transporte Paralelo . . . . .	34
<b>4</b>	<b>A GRAVITAÇÃO COMO CURVATURA</b> . . . . .	<b>36</b>
4.1	Tensor de Riemann . . . . .	36
4.1.1	Propriedades do Tensor de Riemann . . . . .	37
4.1.2	Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura . . . . .	39
4.2	Equação de Campo de Einstein . . . . .	40
4.2.1	Tensor Momento-Energia . . . . .	41



4.2.2	Estrutura da Equação de Campo . . . . .	42
4.3	<b>Uma outra abordagem</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>COSMOLOGIA HOMOGENEA E ISOTRÓPICA</b> . . . . .	<b>49</b>
5.1	Espaços Simétricos . . . . .	49
5.2	Dinâmica do Universo Homegêneo e Isotrópico . . . . .	53
5.3	Redshift cosmológico . . . . .	59
5.4	Horizontes . . . . .	61
5.5	Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	62
<b>6</b>	<b>INFLAÇÃO</b> . . . . .	<b>65</b>
6.1	O Campo Escalar e a Quebra Espontânea de Simetria . . . . .	65
6.2	Problemas da Cosmologia Padrão . . . . .	69
6.2.1	Problema da Planicidade . . . . .	69
6.2.2	Problema do Horizonte . . . . .	70
6.2.3	Problema do monopólo magnético . . . . .	72
6.3	Inflação Slow-roll . . . . .	72
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>76</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>77</b>
	<b>APÊNDICE A – SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD</b> . . . . .	<b>80</b>
	<b>APÊNDICE B – SOLUÇÃO DO CAMPO ESCALAR</b> . . . . .	<b>84</b>

# 1 Introdução

Desde o século XVIII, Leibniz, Huygens e outros filósofos discutiam a respeito do conceito de espaço da mecânica newtoniana e criticavam a concepção de Newton do *espaço absoluto* (JAMMER, 2013). Embora defendessem o apelo estético que uma concepção puramente relativística do espaço teria, estes jamais relacionaram suas ideias com os problemas que surgiam das aplicações da mecânica de Newton. Assim, essa concepção ficou esquecida até o século XIX, quando Fresnel, Stokes e outros começaram a estudar mais a fundo o comportamento ondulatório da luz (KUHN, 1970).

A teoria clássica descrevia a luz com uma ondulação mecânica num meio, chamado de éter, que era regido pelas leis de Newton, tal como ondas num lago. Buscaram através de diversos experimentos a detecção desse meio no qual a luz se propagava, porém nenhum experimento conseguia detectar a sua existência, mas mesmo assim o conceito de éter persistia. Um dos experimentos mais famosos e precisos foi o de Michelson e Morley, realizado em 1887. O cenário começou a mudar com a publicação e aceitação da teoria eletromagnética de Maxwell, no qual, em sua versão final, explicava a luz como um fenômeno eletromagnético. No comportamento eletromagnético de corpos em movimentos, Maxwell não fazia nenhuma referência ao éter, e as conclusões não dependiam deste (KUHN, 1970).

Nos anos que vieram após, os físicos tentaram encontrar uma forma de conciliar a teoria de Maxwell com a existência do éter e introduzir este na teoria, além de tentar detectar sua existência. Lorentz tentou desenvolver uma teoria que envolvia a contração do comprimento de corpos rígidos e a dilatação temporal de relógios em movimento através do éter, de forma a explicar o fato de não se detectar o movimento da Terra em relação ao éter (RINDLER, 1982), mais tarde Poincaré viria a refinar as ideias de Lorentz.

Em setembro de 1905, Einstein publicou o artigo *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento* (EINSTEIN, 1983a) onde ele reconciliou a eletrodinâmica de Maxwell com as leis da mecânica introduzindo mudanças nesta última. Einstein se baseou em dois postulados que fundamentaram sua teoria, de maneira heurística, introduziu o *princípio da relatividade*, que discorria a respeito de referências inerciais e impôs que a velocidade da luz tinha um valor fixo para todos os referenciais inerciais. A teoria ficou conhecida como *relatividade especial*, era condizente com as observações experimentais da não detecção do éter e, a partir de seus postulados, era capaz de fazer previsões que posteriormente foram provadas (RINDLER, 1982).

A nova teoria de Einstein tratava sobre tempo, massa, energia de forma consistente com o eletromagnetismo de Maxwell, mas nada dizia sobre a interação gravitacional. Na tentativa de incorporar a gravidade na sua nova teoria, em 1907, Einstein começou sua

jornada com um *Gedankenexperiment*. Ele percebeu que um observador que estivesse em queda livre não perceberia campo gravitacional algum, ou ainda, que um observador acelerado não poderia distinguir, localmente, se a aceleração era devida a um campo gravitacional ou do referencial. Einstein então propôs o seu *princípio de equivalência*, em que ele assumia a equivalência completa entre o campo gravitacional e a aceleração de um referencial. Esta suposição estendia o princípio da relatividade aos observadores uniformemente acelerados (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996).

Até 1912 o progresso tinha sido apenas esse, até que Einstein percebeu que se os referenciais acelerados podiam ser equivalentes entre si, a geometria Euclidiana não podia ser válida. Ao adotar uma geometria não-Euclidiana, desenvolvida por Riemann no século anterior, Einstein voltou a fazer progresso publicando um trabalho usando cálculo tensorial, onde pela primeira vez o *tensor métrico* foi usado para descrever a gravitação (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996). A teoria final, contudo, só ficou pronta três anos depois, após diversas correções que surgiram através da colaboração de outros físicos contemporâneos.

Já se sabia na época que a teoria da gravitação de Newton não explicava as anomalias observadas no periélio na órbita de Mercúrio e se pensava que um campo gravitacional poderia desviar um feixe de luz (CÉSAR et al., 2019), que também não era prevista por Newton. As *Equações de Campo da Gravitação* foram publicadas em novembro de 1915 e apresentava a nova teoria de Einstein e estas estavam de acordo com os dados experimentais da precessão do periélio de Mercúrio e corrigia as imprecisões citadas que haviam na gravitação de Newton (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996). As equações são não-lineares e de difícil resolução, mas em 1916 o físico e astrônomo Schwarzschild encontrou a primeira solução não trivial, a métrica de Schwarzschild.

A solução de Schwarzschild pavimentou o caminho para a descrição de colapsos gravitacionais e de objetos que hoje conhecemos com buracos negros. Na sequência, mais soluções foram encontradas gerando um série de conclusões até então inesperadas. Friedmann e Lemaître encontraram soluções nas quais o Universo poderia se expandir e contrair. Mais tarde Hubble confirmou que o Universo estava se expandindo. As equações de Einstein estruturaram o ramo da cosmologia física em que se estuda a estrutura do Universo em grande escala (ELLIS, 2006).

Nesta monografia iremos desenvolver as teorias da relatividade especial e geral, estudando suas consequências, a fim de obtermos as equações de campo de gravitação, desenvolvida por Einstein e outros no início do século XX para podermos usá-las como ferramenta descritiva do Universo em grande escala, explorar os problemas que surgem, como a inflação cósmica pode ser agregada à teoria, bem como explicar os problemas fenomenológicos encontrados nas últimas décadas.

## 2 Relatividade Especial

Até o início do século XX, a mecânica Newtoniana fundamentava quase que toda a física. As leis desta eram declaradas em relação a algum referencial inercial, que servia para determinar quantidades físicas como velocidade, campos elétricos etc. (RINDLER, 2006). Em suma, um referencial inercial é aquele no qual a *primeira lei de Newton* é válida. É importante ressaltar que, se um referencial é inercial, então qualquer outro referencial em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a ele também será um referencial inercial.

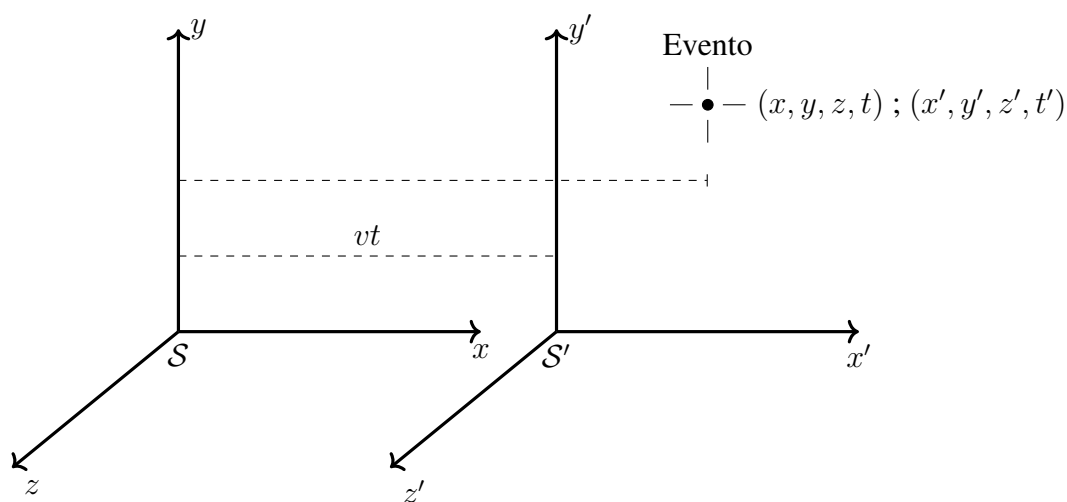


Figura 1 – Um evento P e suas coordenadas em dois referenciais inerciais S e S', onde S' se move com velocidade v, ao longo do eixo X em relação a S.

Para se descrever a evolução temporal de algum evento, usa-se as suas coordenadas num dado sistema de referências. Por exemplo, um evento possui coordenadas num referencial S :  $\{x, y, z, t\}$  e num outro referencial S' :  $\{x', y', z', t\}$ , conforme a figura (1). As coordenadas de um dado evento nos diferentes referenciais da figura (1) se relacionam de acordo com as Transformações de Galileu:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2.1)$$

As transformações mais gerais possíveis seriam dadas por movimentos nos demais eixos. Aqui, entretanto, vamos tomar apenas o caso unidirecional sem perda de generalidade. Ao derivar as (2.1) com relação a t obtemos imediatamente as relações clássicas de transformações de velocidades:

$$v'_x = v_x - v, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z. \quad (2.2)$$

Contudo, em 1864, Maxwell propôs uma nova teoria da eletrodinâmica, no qual a luz seria a manifestação da oscilação de campos elétricos e magnéticos. As relações (2.2) não eram respeitadas na nova teoria da eletrodinâmica de Maxwell, esta previa que a luz, uma onda eletromagnética, movia-se, no vácuo, a uma velocidade constante  $c$  e esta era uma constante universal. Se isto fosse válido num referencial  $S$ , pelas transformações de Galileu, a velocidade não seria mais  $c$  num outro referencial  $S'$ , que se move com velocidade  $v$ .

## 2.1 As Bases da Relatividade Especial

Físicos passaram então a realizar experimentos a fim de detectar a existência do éter, tentando medir a velocidade da Terra em relação à esse meio. Embora o nosso planeta se mova com uma velocidade de aproximadamente  $30 \text{ km/s}$  em relação ao sol e com aproximadamente  $200 \text{ km/s}$  em relação ao centro da Via Láctea, todas as tentativas de medir uma velocidade em relação ao éter falharam (WEINBERG, 1972).

De modo a acomodar essa não percepção do movimento relativo ao éter, diversos físicos, como Hendrik Lorentz, Henri Poincaré etc. começaram a formular teorias a respeito de um “arrasto do éter” que causaria a não observação do movimento relativo da Terra. Porém, foi em 1905 o físico Einstein propôs que as transformações de Galileu (2.1) fossem substituídas por uma outra transformação, que deixava a velocidade da luz invariante e que rompia com a necessidade de um meio no qual a luz se propagaria com tal velocidade constante (WEINBERG, 1972). Einstein enunciou sua Teoria da Relatividade Especial através do seu artigo *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*, na qual se fundamenta em dois postulados:

- i *Princípio da Relatividade Especial*: Todos os referenciais inerciais são equivalentes. Em outras palavras, as leis da física devem valer para todos os referenciais inerciais, quaisquer que sejam estes.
- ii *Constância da velocidade da luz*: A velocidade da luz, no vácuo, é a mesma para todos os referenciais inerciais

O primeiro postulado indica que se um observador, em um referencial inercial  $S$ , realizar um experimento físico e descobrir uma nova lei da física, um outro observador num outro referencial  $S'$ , também inercial, que realizar o mesmo experimento deve, obrigatoriamente, encontrar as mesmas relações e por conseguinte a mesma lei (D'INVERNO, 1992).

Atualmente, diversos experimentos e observações confirmam a constância da velocidade da luz no vácuo. Porém, na época, Einstein a adotou em sua teoria por motivos

puramente heurísticos, uma vez que não havia nada que indicasse que a velocidade da luz seria constante no vácuo. Em outras palavras, podemos entendê-lo como a impossibilidade de um feixe de luz ultrapassar outro feixe de luz no vácuo. Ou ainda, a velocidade da luz emitida por um fonte, não depende da velocidade com que a fonte se move (D'INVERNO, 1992).

Os experimentos realizados à época, para detectar o movimento da Terra em relação ao éter, e os postulados da relatividade especial são incongruentes com a mecânica Newtoniana. Um sinal luminoso emitido por uma fonte em repouso no referencial  $S'$ , que se move com velocidade  $v$ , medido por um observador em  $S$ , deveria apresentar, de acordo com a (2.2), uma velocidade de  $c + v$ . Urge, por estes motivos também, a necessidade de um novo grupo de transformações, que respeitem os postulados e seja compatível com os experimentos.

## 2.2 Transformações de Lorentz

Para resolver o problema das equações de Maxwell não serem invariantes sobre transformações de Galileu, Einstein substituiu as relações (2.1) por um outro tipo de transformações, as quais deixariam as equações de Maxwell invariantes e que respeitariam os dois postulados da relatividade especial. Tomemos as coordenadas  $\mathcal{S} = \{x, y, z, t\}$  como  $x^\mu$ , onde o índice  $\mu$  varia de 0 a 3, correspondendo à  $\{ct, x, y, z\}$  respectivamente. Deste modo:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (2.3)$$

Na componente  $x^0$  multiplica-se  $t$  por  $c$  para que todas as coordenadas possuam dimensão de comprimento.

Queremos, então, uma transformação que relacione as componente  $x^\mu$  de um referencial inercial  $\mathcal{S}$  com as componentes  $x'^\mu$  de um outro referencial inercial  $\mathcal{S}'$ . Seja, então, um relógio movendo-se no referencial  $\mathcal{S}$  sem estar sob ação de nenhuma força, sua posição será dada por  $x^i = x^i(t)$ , onde  $i = (1, 2, 3)$ , logo  $x^i = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ .

Para encontrarmos, de fato, as transformações de Lorentz vamos considerar novamente um evento  $\mathcal{P}$  ocorrendo e sendo mapeado pelos dois referenciais inerciais  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , como descrito na figura (1). Assumimos que, inicialmente, a origem dos dois sistemas de referenciais coincidem, portanto, seus eixos estão dispostos do mesmo jeito. Assim, depois de um tempo  $t$  medido em  $\mathcal{S}$ , os referenciais distam um do outro por  $vt$  e o movimento é realizado ao longo de um dos eixos de  $\mathcal{S}$ , no caso o eixo  $\mathcal{X}$  (RINDLER, 1982).

Como já dito antes, o evento  $\mathcal{P}$  terá, em  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  respectivamente, as coordenadas

$\{ct, x, y, z\}$  e  $\{ct', x', y', z'\}$ . Então temos que a relação se dá por:

$$ct' = Act + Bx + Cy + Dz + E \quad (2.4)$$

$$x' = Fct + Gx + Hy + Iz + J \quad (2.5)$$

$$y' = Kct + Lx + My + Nz + O \quad (2.6)$$

$$z' = Pct + Qx + Ry + Sz + T, \quad (2.7)$$

que se colocarmos numa notação matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ F & G & H & I \\ K & L & M & N \\ P & Q & R & S \end{pmatrix}}_{\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x^\mu} + \underbrace{\begin{pmatrix} E \\ J \\ O \\ T \end{pmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{x'^\mu}. \quad (2.8)$$

Vamos tomar  $\alpha = 0$ . Dada a consideração a respeito dos eixos  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{Z}$  dos referenciais  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , quando  $y = 0$ , tem-se também que  $y' = 0$ . O mesmo vale para  $z$  e  $z'$ , reduzindo as equações (2.6) e (2.7) a:

$$y' = My \quad (2.9)$$

$$z' = Sz, \quad (2.10)$$

se fizermos com que  $\mathcal{S}$  se mova com velocidade  $-v$  em relação a  $\mathcal{S}'$  e revertermos os eixos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Z}$ , ou seja:

$$x \longleftrightarrow -x', \quad y \longleftrightarrow y', \quad z \longleftrightarrow -z', \quad t \longleftrightarrow t'. \quad (2.11)$$

Devemos ter a mesma transformação de antes com os mesmo valores de (2.8), mudando somente as componentes de  $\mathcal{S}$  com as de  $\mathcal{S}'$ . Assim, a (2.9) fica:

$$y = My'. \quad (2.12)$$

Analisando (2.9) e (2.12), vemos que  $M = \pm 1$ . Como  $v \rightarrow 0$  deve fazer com que a transformação seja a identidade, *i.e.*  $y = y'$ , temos, necessariamente,  $M = 1$ . Fazendo os mesmos procedimento, mas invertendo os eixos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , teremos também  $S = 1$  (RINDLER, 2006). Portanto:

$$y' = y \quad (2.13)$$

$$z' = z, \quad (2.14)$$

como  $x' = 0$  leva a  $x = vt$ , temos que em (2.5):

$$H = I = 0 \quad (2.15)$$

$$x' = G(x - vt), \quad (2.16)$$

revertendo os eixos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Z}$ , tem-se:

$$x = G(x' + vt'). \quad (2.17)$$

Utilizando do postulado da relatividade especial, que afirma sobre a constância da velocidade da luz, podemos afirmar que um sinal luminoso percorre num tempo  $t$  uma distância  $x = ct$  visto de um referencial  $S$ . Assim como percorrerá  $x' = ct'$  num intervalo de tempo  $t'$  visto num referencial  $S'$ . Substituindo  $x$  e  $x'$  em (2.16) e (2.17), as equações ficam:

$$ct' = Gt(c - v) \quad (2.18)$$

$$ct = Gt'(c + v), \quad (2.19)$$

multiplicando (2.18) por (2.19) e dividindo o resultado por  $tt'$ , teremos:

$$G = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma. \quad (2.20)$$

O parâmetro  $G$  é comumente chamado de  $\gamma$  e conhecido como *fator de Lorentz*, nota-se que  $\gamma$  é uma função de  $v$ . Desta maneira, a transformação de  $x$  para  $x'$  é dada por:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt). \quad (2.21)$$

Comparando (2.21) com (2.5), vemos que, como  $G = \gamma$ ,  $J = 0$  e  $F = -\gamma v$ . A (2.17) se resume a:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (2.22)$$

que resolvendo para  $t'$ , resulta em:

$$t' = \frac{x}{\gamma v} - \frac{x'}{v}, \quad (2.23)$$

substituindo (2.21) em (2.23), tem-se:

$$t' = \frac{x}{\gamma v} - \frac{\gamma x}{v} + \gamma t \quad (2.24)$$

$$= \gamma \left( \frac{x}{\gamma^2 v} - \frac{x}{v} + t \right) \quad (2.25)$$

$$= \gamma \left( \frac{x(c^2 - v^2)}{c^2 v} - \frac{x}{v} + t \right) \quad (2.26)$$

$$= \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (2.27)$$



Juntando os resultados obtidos chegamos às *transformação de Lorentz*:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (2.28)$$

onde  $\gamma$  é dado por (2.20). Comparando (2.28) com (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7), concluímos que  $A = \gamma$  e  $B = -\gamma v/c^2$ . Como já mencionado antes, usaremos  $(ct, ct')$  ao invés de  $(t, t')$ , para isso precisamos ajustar  $B$  e  $F$  para  $Bc$  e  $F/c$ . Desta forma, a transformação escrita na forma matricial fica:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

onde  $\beta = v/c$ . Temos também que o primeiro termo da (2.8) rescreve-se como:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Uma consequência imediata das transformações de Lorentz (2.28) é que o tempo deixa de ser absoluto e passa a se transformar também, diferente da (2.1). Com isso, um evento que ocorra num tempo  $t$ , para um observador num referencial inercial, não ocorrerá no mesmo instante  $t'$  para um outro observador noutro referencial inercial, ou ainda, em outras palavras, o evento não será simultâneo para dois observadores se movendo um em relação ao outro. Isso implica que a simultaneidade de eventos é relativa. Nota-se também que no limite de baixas velocidades, *i.e.* quando  $v \ll c$  ou  $c \rightarrow \infty$ , as transformações de Lorentz se reduzem às transformações de Galileu, pois nesse caso  $\gamma \rightarrow 1$  (RINDLER, 1982).

Na mecânica Newtoniana, como o tempo era absoluto, dois eventos simultâneos possuem coordenadas  $\{t, x_1, y_1, z_1\}$  e  $\{t, x_2, y_2, z_2\}$ , então o quadrado da distância Euclidiana entre eles:

$$\sigma^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \quad (2.31)$$

é uma quantidade invariante sob transformações de Galileu (D'INVERNO, 1992). Vamos então construir uma quantidade invariante para o novo sistemas de coordenadas quadridimensionais da relatividade especial. O quadrado do intervalo entre dois eventos com  $\{ct, x, y, z\}$  e  $\{ct', x', y', z'\}$  pode ser definido como:

$$s^2 = (ct - ct')^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z - z')^2, \quad (2.32)$$

se os eventos forem infinitesimalmente separados um do outro, tal como  $\{ct, x, y, z\}$  e  $\{ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz\}$ , temos que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.33)$$

que é invariante sob transformações de Lorentz (2.28)(D'INVERNO, 1992), uma vez que:

$$dx'^2 = \gamma^2 (dx - vdt)^2 = \gamma^2 (dx^2 - 2vdxdt + v^2 dt^2) \quad (2.34)$$

$$dt'^2 = \gamma^2 \left( dt - \frac{v}{c^2} dx \right)^2 = \gamma^2 \left( dt^2 - \frac{2vdxdt}{c^2} + \frac{v^2}{c^4} dx^2 \right) \quad (2.35)$$

$$dy'^2 = dy^2 \quad (2.36)$$

$$dz'^2 = dz^2, \quad (2.37)$$

então:

$$ds'^2 = c^2 \gamma^2 \left( dt^2 - \frac{2vdxdt}{c^2} + \frac{v^2}{c^4} dx^2 \right) - \gamma^2 (dx^2 - 2vdxdt + v^2 dt^2) - dy^2 - dz^2 \quad (2.38)$$

$$= \gamma^2 \left[ (c^2 - v^2) dt^2 - 2vdxdt + 2vdxdt - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dx^2 \right] - dy^2 - dz^2 \quad (2.39)$$

$$= \gamma^2 \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dx^2 \right] - dy^2 - dz^2 \quad (2.40)$$

$$= \gamma^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} c^2 dt^2 - \frac{1}{\gamma^2} dx^2 \right) - dy^2 - dz^2 \quad (2.41)$$

$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2. \quad (2.42)$$

Fica claro que  $ds^2$  pode assumir um valor negativo, positivo ou nulo, logo este não poderia ser o simples quadrado de um número real, veremos mais adiante que se trata do quadrado de um quadrivetor. Quando escrito como  $\Delta s^2$  este será chamado de *intervalo de linha* entre dois eventos (RINDLER, 2006).

## 2.3 Consequências cinemáticas das Transformações de Lorentz

Vamos nessa seção discutir a respeito de dois fenômenos decorrentes das transformações de Lorentz e que são puramente cinemáticos, *i.e.* não envolvem a dinâmica relativística (NUSSENZVEIG, 2014). São estes a *contração do comprimento* e a *dilatação temporal*.

### 2.3.1 Contração do comprimento

Quando medimos alguma grandeza de algum objeto no referencial em que este está em repouso dá-se o nome de *valor próprio* a esta medida. Ou seja, se uma barra tem comprimento  $l_0$  num referencial  $S'$ , em que esta encontra-se em repouso, temos que  $l_0$  é o comprimento próprio dessa barra. Assumindo que as extremidades dessa barra ficam nas posição  $x'_1$  e  $x'_2$  do eixo  $\mathcal{X}$  de  $S'$ , então:

$$l_0 = x'_1 - x'_2. \quad (2.43)$$

Um observador num referencial  $S$  que vê  $S'$  se move com velocidade  $v$ , conforme a figura 1, que deseja medir a barra terá que estar simultaneamente nas posições  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , para obter o comprimento  $l$  medido no seu referencial. Assim:

$$l = x_1(t) - x_2(t), \quad (2.44)$$

como pela (2.28)  $x'_1$  e  $x'_2$  são dados, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} x'_1(t) = \gamma(x_1 - vt) \\ x'_2(t) = \gamma(x_2 - vt) \end{array} \right\} \rightarrow \underbrace{l_0}_{x'_1 - x'_2} = \gamma(x_1 - vt) - \gamma(x_2 - vt) = \gamma(x_1 - x_2) = \gamma l, \quad (2.45)$$

ou seja,

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0. \quad (2.46)$$

Desta maneira, temos que o comprimento da barra em movimento é menor do que a barra em repouso. Este fenômeno já havia sido proposto por Lorentz e Fitzgerald antes de Einstein formular sua teoria da relatividade especial. Vale ressaltar que os comprimentos transversais ao movimento não são alterados (NUSSENZVEIG, 2014).

### 2.3.2 Dilatação temporal

Se tivermos um relógio em repouso num referencial inercial  $S'$  que se move com velocidade  $v$ , relativa a outro referencial inercial  $S$ , conforme a figura 1, os intervalos de tempo  $t'_1$  e  $t'_2$  medidos por este será o seu *tempo próprio*, denotado por  $\Delta\tau'$ . Sendo isso, temos que:

$$\Delta\tau' = t'_1 - t'_2. \quad (2.47)$$

Novamente, um observador em  $S$ , que vê  $S'$  se mover com velocidade  $v$ , e que for medir os intervalos de tempo  $t_1$  e  $t_2$ , o terá de fazer com o seu relógio na mesma posição  $x$ . Pela (2.28) tem-se que  $t_1(x)$  e  $t_2(x)$  :

$$\left. \begin{array}{l} t'_1(x) = \gamma\left(t_1 - \frac{vx}{c^2}\right) \\ t'_2(x) = \gamma\left(t_2 - \frac{vx}{c^2}\right) \end{array} \right\} \rightarrow \Delta\tau' = \gamma\left(\left(t_1 - \frac{vx}{c^2}\right) - \left(t_2 - \frac{vx}{c^2}\right)\right) = \gamma \underbrace{(t_1 - t_2)}_{\Delta\tau}, \quad (2.48)$$

assim, o intervalo de tempo  $\Delta\tau$  medido no referencial em repouso  $S$  se relaciona com o intervalo  $\Delta\tau'$  de um relógio que se move de acordo com (GREINER, 2006):

$$\Delta\tau' = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.49)$$

ou seja, um relógio em repouso em  $S$  mede intervalos de tempo maiores em  $S'$  (NUSSENZVEIG, 2014).

## 2.4 Espaço-tempo de Minkowski

Como visto antes, na relatividade especial, o tempo passa a se comportar como um coordenada comum e passível de transformações, assim, para descrever um evento, precisaremos de quatro componentes:  $\{ct, x, y, z\}$ . Se quisermos então, representar geometricamente esses eventos será necessária a utilização de um espaço quadridimensional, no qual o tempo atua como uma componente. Esse novo conceito é chamado de *espaço-tempo de Minkowski*, ou apenas *espaço-tempo* (RINDLER, 1982). De um modo geral, um conjunto de valores  $x^n$  definem um ponto e o conjunto de variáveis, a  $x^1, x^2, \dots, x^n$  são as coordenadas. O total de pontos correspondentes a todos os valores de coordenadas, dentro de um intervalo, definem um *espaço de  $n$  dimensões*, este é representada por  $V^n$  (SYNGE; SCHILD, 1969).

### 2.4.1 Tensores

Antes de nos aprofundarmos no espaço-tempo, vamos apresentar formalmente o ferramental matemático necessário para se trabalhar com espaços de dimensões maiores. Até então estamos acostumados a tratar do espaço euclidiano usando objetos conhecidos como vetores, vamos ver que vetores são apenas um tipo de um objeto mais geral, e que usaremos no nosso estudo, chamado *tensor*.

De um jeito bem informal e simplista, pode-se definir um tensor como um objeto matemático que relaciona um conjunto de quantidades a um outro conjunto através de uma regra de transformação linear. O uso de tensores na relatividade é fundamental, uma vez que sua característica de se transformar de maneira determinada é o que definirá a mudança de coordenadas que ocorre na teoria.

Uma forma de representar tensores é usando a *notação de índices*, e fazer as operações de acordo com as componentes. O número de índices do tensor nos dará o seu *rank* ou *ordem* e este tem a ver com o número de “transformações” necessárias pra definir o objeto noutro sistema de coordenadas, e, mesmo sem saber, nós já estamos acostumados com os tensores de rank-0 e rank-1. O tensor de rank-0 não possui nenhum índice e

assim não precisa de nenhuma transformação, ou seja é o mesmo em qualquer sistema de coordenadas. Um tensor de rank-0 nada mais é do que um escalar. Já um tensor de rank-1 é um vetor, pois como sabe-se, um vetor  $v^\mu$  num sistema de coordenadas  $x^\mu$  pode ser escrito noutro sistema  $x'^\mu$  conforme (SYNGE; SCHILD, 1969):

$$v'^\mu = \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (2.50)$$

A transformação é ditada pelo termo  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$  e conforme o rank aumenta, aumenta o número de frações a multiplicarem o tensor no lado direito. Já a dimensão do espaço, em que o tensor está, irá determinar o número de componentes do tensor. A dimensão define os valores que os índices podem assumir, por exemplo, um tensor  $T_\mu$  num espaço de 4 dimensões terá as componentes  $T_0, T_1, T_2, T_3$ , enquanto um tensor  $T_{\mu\nu}$  terá  $2^4 = 16$  componentes. Com isso, podemos dizer quem um tensor de rank- $n$  num espaço de dimensão  $m$  é um objeto matemático com  $n$  índices, com cada índice assumindo  $m$  valores e que obedece uma regra de transformação.

Sabendo que um tensor é dado em termos de um sistema de coordenadas, vamos olhar agora para sistema de coordenadas em si. Podemos nos referir às coordenadas de duas maneiras: *covariante* e *contravariante*. Matematicamente falando, esses dois tipos são completamente distintos, porém em aplicações práticas, como a física, e usando coordenadas ortogonais, essa diferença se torna um pouco turva. No espaço euclidiano, por exemplo, as coordenadas covariantes e contravariantes são equivalentes.

Uma coordenada covariante,  $x_\mu$ , é escrita usando um índice subscrito e contravariante,  $x^\mu$  é representada com um índice sobrescrito. Os tensores escritos em função das coordenadas respeitam essa convenção de índices sobrescritos e subscritos. Um tensor que possui todos os índices subscritos é dito um tensor covariante, se este tiver todos os índices sobrescritos é chamado de tensor contravariante. Caso possua índices dos dois modos, é um tensor misto.

Uma outra convenção que adotaremos é a notação de Einstein, que é amplamente utilizada de forma a simplificar a notação dos somatórios. Por exemplo, normalmente o produto escalar do espaço euclidiano é dado por:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 v^i u_i = v^1 u_1 + v^2 u_2 + v^3 u_3. \quad (2.51)$$

A notação de Einstein estabelece que sempre que houve índices repetidos, no caso o índice  $i$ , está implícito que há um somatório sobre esse índice. Ou seja, a (2.51) simplesmente fica:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v^i u_i = v^1 u_1 + v^2 u_2 + v^3 u_3. \quad (2.52)$$

Os índices repetidos são chamados de índices mudos e, devido ao somatório implícito, estes podem ser trocados por qualquer outro par de índices sem que a expressão perca sentido (SYNGE; SCHILD, 1969), por exemplo:

$$u_i v^i = u_a v^a . \quad (2.53)$$

Vamos introduzir um tensor misto que é bastante útil, chamado de *delta de Kronecker* o termo  $\delta^i_j$  é definido como:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} , \quad (2.54)$$

que é uma importante identidade, e que será muito útil mais a frente. Esta surge a partir da delta:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu . \quad (2.55)$$

#### 2.4.1.1 Tensor métrico

O jeito mais simples e fundamental de se representar um sistema de coordenadas fazendo uso de tensores e através do uso de um invariante, *i.e.* escalar, chamado *elemento de linha* e denotado por  $ds$ . O elemento de linha serve para descrever a distância infinitesimal entre dois pontos do espaço. Embora seja um escalar, dependendo do sistema de coordenadas adotado o elemento de linha se apresenta de maneira diferente, por exemplo, em coordenadas cartesianas é:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (2.56)$$

porém, em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (2.57)$$

Embora parece que o elemento de linha mudou de um sistema para o outro, apenas a sua representação mudou, a quantidade  $ds^2$  se mantém a mesma. Podemos sumarizar as relações (2.56) e (2.57) através da seguinte:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.58)$$

onde os coeficientes  $g_{\mu\nu}$  são funções dos  $x$ 's e é chamado de *tensor métrico* (SYNGE; SCHILD, 1969). No caso do espaço tridimensional,  $g_{\mu\nu}$  pode ser representado por uma matriz  $3 \times 3$  de modo que para (2.56) e (2.57) estas fiquem, respectivamente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (2.59)$$

Por definição, o tensor métrico contém as informações a respeito da forma do espaço ao qual pertence. Se o sistema de coordenadas mudar, o tensor métrico também deve mudar, conforme visto em (2.59). Nota-se que em coordenadas cartesianas e esféricas  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ .

#### 2.4.1.2 Levantar e Abaixar Índices

Outra propriedade do tensor métrico é sua capacidade de permitir mudança de índices covariantes para contravariantes e vice-versa. Por exemplo, para “abaixarmos” os índices contravariantes de tensores, fazemos que:

$$T_{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\nu}, \quad (2.60)$$

e podemos fazer de um modo geral:

$$T_{\mu\nu\kappa\dots} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\kappa\gamma} \dots T^{\alpha\beta\gamma\dots}. \quad (2.61)$$

Para se “levantar” os índices, será necessário fazer uso do tensor métrico inverso que é definido a partir da delta de Kronecker como:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_{\mu}^{\kappa}, \quad (2.62)$$

e com isso:

$$T^{\mu} = g^{\mu\nu} T_{\nu}. \quad (2.63)$$

Generalizando:

$$T^{\mu\nu\kappa\dots} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\kappa\gamma} \dots T_{\alpha\beta\gamma\dots}, \quad (2.64)$$

e, por exemplo, em comparação com a (2.59), para as coordenadas cartesianas temos que  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ , enquanto que para as coordenadas esféricas:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

o que claramente concorda com (2.62).

#### 2.4.1.3 Transformações de coordenadas

Quando trabalhamos com mudanças de coordenadas no cálculo infinitesimal usamos o determinante Jacobiana para realizar essa mudança de coordenadas. Por exemplo, de coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -s \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & s \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.66)$$

esse determinante pode ser escrito de forma condensada usando a nova notação, de tal forma que (SYNGE; SCHILD, 1969):

$$J = \left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right|. \quad (2.67)$$

Isso vale para um espaço de qualquer dimensão. Colecionando esse aparato desenvolvido, podemos generalizar o caso visto em (2.50) e definir que um tensor totalmente covariante, seja qual for seu o rank, se transforma como:

$$T'_{\mu\nu\kappa\dots} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\kappa} \dots T_{\alpha\beta\gamma\dots}, \quad (2.68)$$

um contravariante conforme:

$$T'^{\mu\nu\kappa\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\gamma} \dots T^{\alpha\beta\gamma\dots}. \quad (2.69)$$

Uma característica importante surge dessas transformações, se um tensor é nulo em um sistema de coordenadas, logo ele será nulo em todos os outros sistemas de coordenadas.

Com isso, podemos ver que, se efetuarmos as derivadas em relação às componentes (2.3) em (2.28), igual ocorre nas transformações de tensores, as transformações de Lorentz são de fato transformações de tensores, pois:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} = \gamma & \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} = -\beta\gamma & \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} = 0 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} = 0 \\ \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} = \beta\gamma & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = \gamma & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} = 0 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = 0 \\ \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = 1 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} = 0 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} = 0 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} = 0 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = 1 \end{array}. \quad (2.70)$$

No espaço-tempo de Minkowski as transformações de coordenadas são dadas pelas transformações de Lorentz, deste modo, as transformações de tensores no espaço-tempo são dadas por (WEINBERG, 1972):

$$T'^{\mu\nu\kappa\dots} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\kappa_\gamma \dots T^{\alpha\beta\gamma\dots}. \quad (2.71)$$

## 2.4.2 Descrição do Espaço

Em posse disso, podemos de fato fazer uma descrição do espaço-tempo de Minkowski. Como vimos, o ponto principal da relatividade especial seja o fato de o tempo se comportar e funcionar como uma coordenada ordinária, passível de mudanças e transformações. Matematicamente, isso significa incluí-la como uma coordenada de um espaço quadridimensional. Conforme vimos, uma ferramenta extremamente útil no nosso estudo é o elemento de linha, porém devemos ter precaução ao incluir este no elemento de linha, pois a coordenada tempo possui uma contribuição diferente. Em primeiro lugar, entra



um fator de correção  $c$  multiplicando o tempo  $t$  e outro ponto é que a coordenada tempo se comporta de maneira “oposta” as coordenadas espaciais, fazendo necessário o uso de um sinal negativo (mais especificamente se trata de uma variedade pseudoriemanniana). Usando a (2.58) temos que, em coordenadas cartesianas, no espaço-tempo de Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.72)$$

e assim o tensor métrico deste espaço-tempo (RINDLER, 1982):

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Podemos ver que nessas coordenadas  $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ . Em suma, a métrica do espaço-tempo e o elemento de linha contém toda a informação necessária para descrever o espaço-tempo.

### 2.4.3 Diagramas de Minkowski

Para explorar algumas propriedades do espaço-tempo, é útil a utilização de diagramas que representem as posições de eventos no espaço-tempo. Os diagramas simplificados com as coordenadas espaciais e a coordenada temporal num plano é chamado de *diagrama de Minkowski*.

Assumindo que o espaço-tempo é homogêneo precisamos apenas analisar um ponto e sua vizinhança para que se compreenda o todo. Seja um evento qualquer  $\mathcal{P}$  em  $x^\mu$  e todos os eventos que ocorrem na sua vizinhança  $x^\mu + \Delta x^\mu$ . Pode-se classificar todos esses eventos da vizinhança de  $\mathcal{P}$  em apenas três tipos de acordo com o quadrado do seu vetor deslocamento  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$  (RINDLER, 1982). Generalizando para um deslocamento infinitesimal, *i.e.*  $\Delta s^2 \rightarrow ds^2$ , teremos os seguintes tipos de vetores no espaço de Minkowski:

- $ds^2 = 0$ : Vetor tipo luz ou nulo

São os eventos caracterizados por estarem conectados a  $\mathcal{P}$  por um sinal luminoso, ou seja a velocidade de propagação do evento é  $c$ , que pelos postulados da relatividade restrita, só pode ser um evento luminoso.

- $ds^2 > 0$ : Vetor tipo tempo

Eventos ligados a  $\mathcal{P}$  por uma conexão causal são denominados do tipo tempo, onde se é possível determinar uma dependência entre eventos. Em outras palavras, qual ocorreu antes ou depois de um outro evento.

- $ds^2 < 0$ : Vetor tipo espaço

Caracterizam os eventos sem relação causal com o evento  $\mathcal{P}$ , em tese são eventos que só poderiam estar conectados a  $\mathcal{P}$  por sinais com velocidade maior que  $c$ , porém como isso violaria os postulados da relatividade especial, só podem ser eventos não conectados a  $\mathcal{P}$ , ou seja, um observador na origem não seria capaz de ver os eventos.

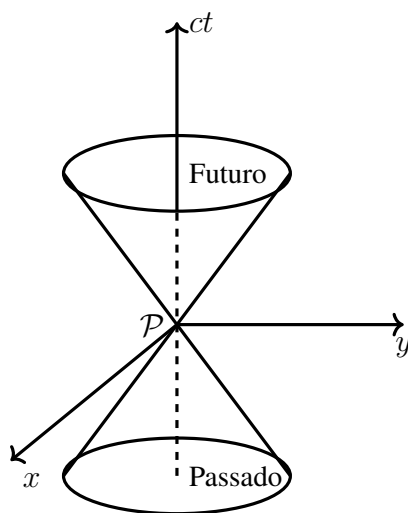


Figura 2 – Cone de luz no diagrama de Minkowski

Imaginando a luz confinada num plano bidimensional, se um evento  $\mathcal{P}$  fosse um flash de luz, este se espalharia em um círculo. Se fizermos um gráfico do círculo crescente onde o eixo vertical do gráfico representaria o tempo, o resultado será um cone, conhecido como *cone de luz*. Na realidade, como existem três dimensões espaciais, a luz realmente formaria uma esfera de expansão ou contração em espaço um tridimensional em vez de um círculo em 2D, e o cone de luz seria na verdade uma versão quadridimensional de um cone cujas seções transversais formam esferas, porém o conceito é mais fácil de visualizar com o número de dimensões espaciais reduzidas de três para dois, conforme a figura (2).

O cone de luz desempenha um papel essencial na definição de causalidade para um determinado evento  $\mathcal{P}$ . O conjunto de eventos que se encontram sobre ou dentro do cone de luz passado de  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os eventos que poderiam ter enviado um sinal luminoso que teria tempo para chegar a  $\mathcal{P}$  e influenciá-lo de alguma forma. Enquanto pontos fora do cone não são capazes de ter qualquer influência causal sobre  $\mathcal{P}$ , assim como  $\mathcal{P}$  não pode gerar influência sobre eles. Da mesma forma, o conjunto de eventos que estão sobre ou dentro do cone de luz futuro de  $\mathcal{P}$  também seria o conjunto de eventos que poderiam receber um sinal luminoso enviado da posição e do tempo de  $\mathcal{P}$ . Assim, o cone de luz futuro contém todos os eventos que podem ser potencialmente influenciados por  $\mathcal{P}$ .

## 2.5 Mecânica Relativística

Até então tratamos apenas dos postulados da relatividade especial e suas consequências via transformações de Lorentz, além de se construir o espaço geométrico que comporta a relatividade especial. Assim como na antiga mecânica Newtoniana, a nova mecânica relativística terá sua dinâmica e suas grandezas cinemáticas associadas. Vimos que (2.33) é um invariante sob transformações de Lorentz e é a partir deste que construiremos um invariante de tempo para a mecânica relativística e definir quantidade como velocidade e aceleração, assim como é feito na mecânica Newtoniana. Vamos definir  $d\tau$ , a partir de (2.33), como (GREINER, 2006):

$$d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} \quad (2.74)$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2 c^2}} \quad (2.75)$$

$$= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.76)$$

$$= \frac{dt}{\gamma}. \quad (2.77)$$

Como já mencionado antes,  $\tau$  é chamado de tempo próprio, e agora podemos entender melhor o porquê. Comparando (2.77) e (2.49) vemos que o tempo próprio é, de fato, aquele medido no referencial de repouso.

De posse disso, podemos obter o quadrivetor velocidade  $\mathbf{V}^1$ , associado ao espaço-tempo de Minkowski, simplesmente tomando a derivada do quadrivetor posição em relação ao tempo próprio:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (2.78)$$

$$= \gamma \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (2.79)$$

conforme (2.3),  $x^\mu$  denota  $\{ct, x, y, z\}$ , temos que:

$$\gamma \frac{d}{dt}(ct, x, y, z) = \gamma(c, \mathbf{v}) = V^\mu, \quad (2.80)$$

onde  $\mathbf{v}^2$  é o vetor velocidade tridimensional. Aplicando novamente a derivada para agora

<sup>1</sup> Usaremos uma letra maiúscula e em negrito para denotar um quadrivetor

<sup>2</sup> Usaremos uma letra minúscula e em negrito para denotar um vetor tridimensional

definir o quadrivetor aceleração  $\mathbf{A}$ , lembrando que  $\gamma$  depende de  $v$ , teremos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}(\gamma V^\mu) \quad (2.81)$$

$$= \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} c, \gamma \underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{=\mathbf{a}} + \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} \right) \quad (2.82)$$

$$= \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} c, \gamma \mathbf{a} + \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} \right) = A^\mu . \quad (2.83)$$

No caso onde  $\mathbf{v} = 0$  *i.e.* no referencial de repouso instantâneo, a quadriaceleração  $\mathbf{A}$  se reduz a:

$$A^\mu = (0, \mathbf{a}) . \quad (2.84)$$

Agora, após definidos (2.80) e (2.83), vamos definir as grandezas quadrimomento  $\mathbf{P}$  e quadriforça  $\mathbf{F}$  associadas ao nosso espaço quadrimensional. Partindo da definição de momento usual,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , vamos definir o quadrimomento como:

$$\mathbf{P} = m_0 \mathbf{V} \quad (2.85)$$

$$= m_0 \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (2.86)$$

$$= (mc, \mathbf{p}) \quad (2.87)$$

$$= m_0 V^\mu = P^\mu , \quad (2.88)$$

onde  $m = \gamma m_0$ . O termo  $m_0$  representa a massa de repouso do objeto ( $m = m_0$  se  $\mathbf{v} = 0$ ) e é invariante sob transformações de Lorentz. Nota-se que quando  $v \rightarrow c$  temos  $m \rightarrow \infty$ , o que indica que somente partículas sem massa de repouso podem atingir a velocidade de  $c$  (GREINER, 2006).

Novamente, partindo da mecânica Newtoniana, onde  $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ , precisamos generalizar para o espaço quadrimensional de forma que esta seja um quadrivetor e que se reduza a força Newtoniana no limite não relativístico. Assim, definimos a quadriforça como (GREINER, 2006):

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \quad (2.89)$$

$$= \frac{d}{d\tau}(mc, \mathbf{p}) \quad (2.90)$$

$$= \frac{d(mc, \mathbf{p})}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (2.91)$$

$$= \gamma \left( m_0 c \frac{d\gamma}{dt}, \mathbf{f} \right) = F^\mu , \quad (2.92)$$

vê-se claramente que quando  $v = 0$  temos que  $\mathbf{F} = (0, \mathbf{f})$ . Veremos agora como essas quantidades se relacionam com a energia cinética, que na mecânica Newtoniana é dada

por:

$$T(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt . \quad (2.93)$$

Derivando em relação ao tempo, temos

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.94)$$

$$= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad (2.95)$$

$$= \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} , \quad (2.96)$$

escrevendo  $\mathbf{v}$  como  $v\hat{\mathbf{u}}$ , onde  $\hat{\mathbf{u}}$  é o versor velocidade, e usando as identidades  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1$  e  $\hat{\mathbf{u}} \cdot d\hat{\mathbf{u}}/dt = 0$ <sup>3</sup>:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v) v \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + (\gamma m_0 v) v \hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} \quad (2.97)$$

$$= \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v) v \quad (2.98)$$

$$= m_0 c^2 \beta \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (2.99)$$

$$= m_0 c^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) , \quad (2.100)$$

onde  $\beta = v/c$ . Integrando em relação ao tempo, fica:

$$T = m_0 c^2 \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) dt \quad (2.101)$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Big|_{t_0}^t , \quad (2.102)$$

fazendo para  $t_0 = 0$ ,  $v = 0$  tem-se:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 . \quad (2.103)$$

O termo  $m_0 c^2$  é comumente chamado de *energia de repouso*. Definindo  $E$  como a energia total e rearranjando a equação chegamos a:

$$T + m_0 c^2 = mc^2 \quad (2.104)$$

$$E = mc^2 . \quad (2.105)$$

---

<sup>3</sup> Aqui assumiremos que  $m_0$  não varia

É importante ressaltar que (2.105) é a energia total de uma partícula livre, caso esteja sob ação de um campo existirá um termo da energia potencial desse campo. E podemos agora rescrever (2.88), utilizando os resultados de (2.105), como:

$$P^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (2.106)$$

Um resultado importante a respeito da equivalência entre massa, energia e momento surge a partir de (2.106). Se fizermos o produto interno de  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ , *i.e.*  $P_\mu P^\mu$ , obtemos que:

$$P_\mu P^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \cdot \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (2.107)$$

$$= \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \quad (2.108)$$

$$, \quad (2.109)$$

porém, usando a (2.88) teremos que o módulo de  $\mathbf{P}$  é dado por:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = m_0 \mathbf{V} \cdot m_0 \mathbf{V} \quad (2.110)$$

$$= m_0^2 \mathbf{V}^2 = m_0^2 c^2, \quad (2.111)$$

pois:

$$\left( \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \quad (2.112)$$

$$= (\gamma(c, \mathbf{v}))^2 \quad (2.113)$$

$$= \gamma(c^2 - v^2) \quad (2.114)$$

$$= c^2, \quad (2.115)$$

juntando (2.109) e (2.111) e resolvendo para  $E^2$ :

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2 \quad (2.116)$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (2.117)$$

ou ainda:

$$E^2 = (\mathbf{pc})^2 + (m_0 c^2)^2 = (mc^2)^2. \quad (2.118)$$

A (2.118) é conhecida como a *relação relativística momento-energia* (GREINER, 2006). Vale ressaltar que se a partícula possui massa de repouso igual a zero, como um fóton, a energia é dada por  $E = pc$ .

## 3 Princípios da Relatividade Geral

Vimos até aqui a relatividade especial, uma teoria que reformula a antiga mecânica tornando-a compatível com o eletromagnetismo de Maxwell e que introduziu uma série de conceitos novos como espaço-tempo e as transformações de Lorentz. Na relatividade especial, o princípio da relatividade determinou a inexistência de referenciais privilegiados, *i.e.* todos os referenciais inerciais são equivalentes, assim, a descrição gravitacional vigente na época se tornou incoerente sob o novo contexto relativístico. Tendo a intenção se estender as ideias da relatividade especial para os referenciais não inerciais e conectar sua teoria com a gravitação, Einstein tomou como ponto de partida alguns princípios físicos (ACEVEDO et al., 2019), nesta monografia discutiremos apenas o *princípio de equivalência* e o *princípio de covariância geral*.

### 3.1 Princípio de Equivalência

Antes de declarar o princípio de equivalência, vamos primeiro fazer uma breve discussão a respeito da massa de um corpo. Pode-se diferenciar dois tipos de massa, mesmo na mecânica Newtoniana (D'INVERNO, 1992):

- **Massa inercial:** podemos definir a massa inercial como uma medida de resistência do corpo a mudança de movimento, o quanto um corpo tendo a manter sua inércia. É a massa presente na segunda lei de Newton e, *a priori*, nada tem a ver com a gravitação.
- **Massa gravitacional:** a massa gravitacional pode ser entendida como um medida da resposta do corpo a um campo gravitacional ou o quanto de campo gravitacional esse corpo produz. Uma boa analogia é entender a massa gravitacional como a carga da gravitação, assim como a carga elétrica atua no eletromagnetismo.

Galileu foi um dos primeiros a perceber que a queda livre dos corpos era independente da massa destes. A unicidade da aceleração dos corpos em queda livre implica que a razão entre massa inercial e massa gravitacional deve ser a mesma para todos os corpos. Desde os primeiros experimentos feitos por Galileu, este fato foi comprovado por diversos experimentos (TINO et al., 2020). Escolhendo adequadamente o sistema de unidades, pode-se fazer com que a razão entre as massas inercial e gravitacional seja igual à unidade, de modo que a massa inercial e a massa gravitacionais sejam iguais (ACEVEDO et al., 2019), esta proposição é conhecida como o *princípio de equivalência fraco*.

No trabalho *Sobre a Influência da Gravidade na Propagação da Luz* (EINSTEIN, 1983b), Einstein concebeu uma suposição a respeito da natureza de um campo gravitacional. Assumindo a existência de um campo gravitacional que, visto de um referencial inercial  $\mathcal{S}$ , possui uma certa intensidade  $g$ . Caso o campo seja homogêneo, todas as partículas sob a ação deste campo terão uma mesma aceleração  $g$ . A descrição do movimento das partículas sob ação deste campo, descrito por um observador em  $\mathcal{S}$  seria a mesma de um observador noutro referencial não-inercial  $\mathcal{S}'$  sem campo gravitacional, mas com aceleração  $g$  em relação a  $\mathcal{S}$ . A ideia de Einstein é que a equivalência entre o referencial  $\mathcal{S}$  num campo gravitacional e o referencial não-inercial  $\mathcal{S}'$  sem o campo é válida não só para esse processos mecânicos, mas para todos os processos físicos, ou seja as leis físicas estabelecidas em  $\mathcal{S}$  devem ser congruentes com as mesmas que se estabelecerem em  $\mathcal{S}'$ . Essa formulação é conhecida como *princípio de equivalência forte* e é considerado como a base de toda a Relatividade Geral (ACEVEDO et al., 2019).

## 3.2 Princípio de Covariância Geral

Como vimos na seção 2.1 a relatividade se vale do princípio da relatividade, o qual afirma que todos os referenciais inerciais são equivalentes. Uma vez que um sistema de referências é uma construção abstrata usada para se descrever fenômenos físicos, a natureza não deveria depender desta escolha arbitrária, em outras palavras é desprovida de conteúdo físico (FALCIANO, 2009). Logo, como as leis da natureza não devem depender da escolha de referencial, pode-se entender que não apenas os referenciais inerciais, mas todos os referenciais são equivalentes (D'INVERNO, 1992).

A intenção em se tirar o significado físico das coordenadas enquanto medida era a utilização de uma nova estrutura, extremamente poderosa, de invariância acerca dos fenômenos físicos. O pressuposto de que as equações de campo da gravitação têm uma covariância geral implica que a estrutura dos efeitos observados não sejam predeterminados como era no espaço absoluto de Newton, mas passam a ser definidas através de campos que evoluem ao longo do tempo e que interagem com a matéria (JR et al., 2011).

Pode-se definir que o princípio de covariância geral afirma que a leis da natureza devem ser expressas numa forma tensorial covariante e que estas devem ser as mesmas tanto em referenciais inerciais quanto em não-inerciais. De fato, qualquer teoria de espaço-tempo pode ser formulada na forma covariante, e como vimos, tensores são objetos matemáticos que são invariantes sob um certo tipo de transformações. O grupo de transformações definirá uma classe de objetos que fica invariante sob sua ação, esta classe é o que chamamos de referenciais inerciais (FALCIANO, 2009).

Em suma, qualquer sistema de coordenadas passa a ser igualmente válido para



a representação do espaço-tempo, o que obriga o uso de objetos que sejam covariantes e definidos de forma independente da escolha de um sistema de coordenadas para a descrição das leis da física. Embora essa propriedade cause uma dispensabilidade quanto ao observador e fazem com que as medições físicas sejam apenas representações, ela não torna a medida irreal. A correlação entre invariantes com a realidade objetiva tornou-se um modelo da ciência normal dentro do paradigma atual, sendo o fundamento conceitual de diversas teorias modernas (JR et al., 2011).

### 3.3 Interação Gravitacional

Partindo destes princípios, e devido a unicidade da aceleração de corpos em queda livre a gravitação, pode ser descrita não como uma força, mas como a deformação do espaço-tempo plano de Minkowski. A interpretação é que o campo gravitacional provoca uma curvatura no espaço tempo, e as partículas percorrem esse espaço curvo pelo menor caminho possível percebendo a ação do campo gravitacional desta forma (ALDROVANDI et al., 2002). Na geometria diferencial, que é usada para descrição de espaços curvos, o conceito de reta num espaço Riemanniano<sup>4</sup> não faz mais sentido, porém é possível levar o conceito de menor distância entre dois pontos para este. Embora não exista, de maneira geral, retas num espaço curvo qualquer, existem certas curvas que obedecem aos pressupostos anteriores. Estas curvas são chamadas de *geodésicas* e são definidas como a curva cujo comprimento tem um valor fixo em relação a pequenas variações arbitrárias da curva, enquanto se mantém as extremidades da curva fixa (SYNGE; SCHILD, 1969). Em suma, a gravidade será descrita pela deformação do espaço-tempo e as trajetórias por geodésicas, e não equações de força.

Suponha uma partícula movendo-se livremente na presença apenas de um campo gravitacional. Pelo princípio de equivalência, deve existir um referencial  $\xi^\alpha$  localmente inercial em que a equação de movimento da partícula pelo espaço-tempo é descrita por uma reta, ou seja (WEINBERG, 1972):

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (3.1)$$

onde  $d\tau$  é dado, conforme (2.77)<sup>5</sup> e (2.62), por:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (3.2)$$

Se por acaso, deseja-se usar um outro sistema de coordenadas qualquer  $x^\mu$  para se descrever o movimento, temos que as coordenadas  $\xi^\alpha$  serão funções de  $x^\mu$ . Então, pode se escrever

<sup>4</sup> Espaço real, suave e dotado de produto interno (CARMO, 1992)

<sup>5</sup> A partir deste ponto adotaremos  $c = 1$

(3.1) como:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0, \quad (3.3)$$

aplicando a derivada, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (3.4)$$

multiplicando por  $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ , a equação de movimento se torna:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \overbrace{\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}}{=\delta^\lambda_\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (3.7)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é o objeto de um espaço que conecta<sup>6</sup> o espaço tangente a este, permitindo assim diferenciação de campos vetoriais tangentes como se fossem funções do próprio espaço (CARMO, 1992). É chamado de *conexão afim* e definido por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (3.8)$$

A última equação de (3.7) é equação da geodésica e descreve a trajetória de uma partícula sob ação de campo gravitacional. Nota-se que, se  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ , a equação da geodésica se reduz a eq. (3.1). Logo  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  pode ser relacionada, de forma abstrata, com a força feita pelo campo gravitacional na gravitação de Newton, porém é importante lembrar que no paradigma da relatividade geral o conceito de força gravitacional não existe.

### 3.4 A conexão em função da métrica do espaço

Como vimos anteriormente, o tempo próprio expresso em (3.2) é um invariante no espaço-tempo e também podemos escrevê-lo num sistema de coordenadas qualquer:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (3.9)$$

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.10)$$

onde o termo  $g_{\mu\nu}$  é o *tensor métrico* e é definido por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (3.11)$$

<sup>6</sup> Relaciona a geometria local de um ponto com a geometria local em torno de outro ponto (KOLÁR et al., 2013)

Podemos ver que se fizermos uma mudança de coordenadas o tensor métrico teremos:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \quad (3.12)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (3.13)$$

$$= g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} . \quad (3.14)$$

Vimos na seção anterior que a conexão afim  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  pode ser relacionada com a força gravitacional do antigo paradigma da gravitação e, de acordo com (3.10), o tempo próprio  $\tau$  é determinado pelo tensor métrico (WEINBERG, 1972). Veremos agora como esses termos se correlacionam e seu significado físico, tomando a derivada da métrica (3.11) com relação a alguma coordenada qualquer:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right) \quad (3.15)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} , \quad (3.16)$$

usando a definição (3.8):

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\kappa} \eta_{\alpha\beta} , \quad (3.17)$$

recorrendo à (3.11), podemos escrever como:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa g_{\mu\kappa} , \quad (3.18)$$

tomando as derivadas  $\partial g_{\nu\lambda}/\partial x^\mu$ ,  $\partial g_{\mu\lambda}/\partial x^\nu$  e permutando os índices, teremos que:

$$\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\lambda} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\lambda} , \quad (3.20)$$

se somarmos (3.18) e (3.19) e subtrairmos (3.20), temos a seguinte relação:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} . \quad (3.21)$$

Assumindo que estamos tratando de um espaço sem torção, podemos assumir que a conexão afim é simétrica em relação aos índices covariante, isto é  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$ . Pela característica da operação de levantar e abaixar índices, temos que a identidade  $g_{\kappa\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\kappa}^{\rho}$  é válida e uma vez que:

$$g^{\nu\rho} = g^{\rho\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\beta} , \quad (3.22)$$

podemos multiplicar a (3.21) por  $g^{\nu\rho}$  e obter:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (3.23)$$

Por vezes a (3.23) é chamada de *símbolo de Christoffel* e denotada por  $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \lambda\mu \end{smallmatrix} \right\}$  (WEINBERG, 1972).

Para obter uma lei de transformação para o símbolo de Christoffel, podemos usar a transformação da métrica (3.14), vimos que a métrica se comporta como um tensor covariante. E sua derivada, conforme feito em (3.16), se transforma de acordo com:

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} \left( g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) \quad (3.24)$$

$$= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}}, \quad (3.25)$$

calculando  $\frac{\partial g'_{\lambda\nu}}{\partial x'^{\mu}}$  e  $\frac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial x'^{\nu}}$ , teremos:

$$\frac{\partial g'_{\lambda\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\tau\sigma} \frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\tau\sigma} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} + g_{\tau\rho} \frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} + g_{\tau\rho} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}}, \quad (3.27)$$

como  $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ , podemos reescrever a (3.23) na forma covariante como (RINDLER, 2006):

$$2\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}. \quad (3.28)$$

A lei de transformação para (3.28) fica:

$$2\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}' = \frac{\partial g'_{\lambda\nu}}{\partial x'^{\mu}} + \frac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\lambda}} \quad (3.29)$$

$$= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \overbrace{\left( \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \right)}{=2\left\{ \begin{smallmatrix} \tau \\ \sigma\rho \end{smallmatrix} \right\}} \quad (3.30)$$

$$+ \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \left( g_{\tau\rho} \frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}} - g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right) \quad (3.31)$$

$$+ \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left( g_{\tau\sigma} \frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\lambda}} - g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\mu}} \right) \quad (3.32)$$

$$+ \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \left( g_{\tau\rho} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} + g_{\tau\sigma} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \right). \quad (3.33)$$

A expressão do último parêntesis pode ser reescrita trocando o índice mudo  $\sigma$  por  $\rho$ , de modo que:

$$g_{\tau\rho} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} + g_{\tau\sigma} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} = g_{\tau\rho} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} + g_{\tau\rho} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} = 2g_{\tau\rho} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}}. \quad (3.34)$$

Fazendo o mesmo para os outros parêntesis vemos que estes se cancelaram, uma vez que os sinais são contrários nestes. Assim, nossa transformação para o símbolo de Christoffel pode ser escrita como:

$$\{\lambda_{\mu\nu}\}' = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \{\tau_{\sigma\rho}\} + g_{\tau\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu}, \quad (3.35)$$

ou na forma mista:

$$\{\lambda_{\mu\nu}\}' = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \{\tau_{\sigma\rho}\} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (3.36)$$

Por outro lado, pela definição (3.8), temos que uma lei de transformação da conexão seria dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.37)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \quad (3.38)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\alpha} \left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \quad (3.39)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \underbrace{\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}}_{=\Gamma_{\sigma\rho}^\tau} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \underbrace{\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\alpha}}_{=\delta_\sigma^\tau} \quad (3.40)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \Gamma_{\sigma\rho}^\tau + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (3.41)$$

Tanto a (3.36) quanto a (3.41) não se transformam como se fossem tensores, porém comparando as duas expressões vemos que ambas se transformam de uma mesma forma. Deste modo podemos fazer uma lei de transformação de um tensor para a diferença entre a conexão e o símbolo de Christoffel, tal que:

$$\left[ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \{\lambda_{\mu\nu}\} \right]' = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \left[ \Gamma_{\sigma\rho}^\tau - \{\tau_{\sigma\rho}\} \right], \quad (3.42)$$

o que nos leva a concluir que essa diferença é de fato um tensor (WEINBERG, 1972). Como existe um referencial em que os efeitos da gravitação são nulos, ou seja os termos de  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  são nulos. Temos também que a métrica neste referencial equivale a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , cujos termos são constantes e, logo, as derivadas são nulas. Como consequência desses dois fatos a diferença  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \{\lambda_{\mu\nu}\}$  equivale a zero num referencial apropriado, porém como é um tensor, e se transforma como tensor conforme (2.71), então este elemento deve ser zero em qualquer referencial. Portanto devemos ter que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \{\lambda_{\mu\nu}\}. \quad (3.43)$$

O princípio de equivalência nos levou a uma equidade entre dois termos, um que está associado a variação da métrica do espaço e outro que serve de analogia para a força

gravitacional da antiga teoria de gravitação, por esse motivo normalmente a conexão é chamada de símbolo de Christoffel e vice-versa. Esses resultados também nos servem para que, usando o princípio de covariância geral, possamos provar que um corpo em queda livre segue a equação de movimento dada em (3.7).

### 3.5 Potencial Gravitacional

Para se manter consistente, a nova teoria de gravitação deve comportar a antiga teoria de gravitação de Newton no limite não-relativístico, *i.e.*  $c$  é grande em comparação com as outras velocidades e  $pc \ll mc^2$ , pois esta funciona bem nesse caso. Duas considerações devem ser feitas nesse caso, a primeira é que o campo gravitacional é fraco e estacionário, de forma que a deformação no espaço é pequena, assim a métrica pode ser escrita como a métrica de Minkowski mais um termo de perturbação (CARROLL, 1997):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3.44)$$

e pela definição do inverso da métrica,  $g_{\nu\sigma}g^{\sigma\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ , tem-se que, em primeira ordem:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.45)$$

A outra é que, como  $c$  é um termo muito grande temos a seguinte relação:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \gg \frac{dx^i}{d\tau}. \quad (3.46)$$

Com estas, a parte que possui apenas componentes espaciais da equação da geodésica fica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (3.47)$$

usando a (3.23), calculamos a conexão como:

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} \left( \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\rho} \right) \quad (3.48)$$

$$= -\frac{1}{2}g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\rho} \quad (3.49)$$

$$= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\rho} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\rho}, \quad (3.50)$$

que na equação da geodésica fica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\rho} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (3.51)$$

Considerando  $\frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} = 0$  a componente  $\mu = 0$  nos dá:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0, \quad (3.52)$$

ou seja,  $\frac{dt}{d\tau}$  é constante. Analisando apenas a parte espacial, onde a métrica  $\eta_{\mu\nu}$  se reduz a matriz identidade  $\mathbb{1}$ , a (3.51) fica:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (3.53)$$

dividindo ambos lados por  $\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2$ :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}. \quad (3.54)$$

Na gravitação Newtoniana tínhamos que a aceleração gravitacional era dada e função de um potencial gravitacional tal como:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\nabla \phi, \quad (3.55)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional, que gerado por uma massa  $M$  a uma distância  $r$  é dado por:

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (3.56)$$

comparando as (3.54) e (3.55) concluímos que:

$$h_{00} = -2\phi, \quad (3.57)$$

levando em conta que  $h_{00}$  vai a zero no infinito e definindo  $\phi$  como zero no infinito, então a métrica se dá por:

$$g_{00} = 1 - 2\phi. \quad (3.58)$$

Conseguimos mostrar, então, que a relatividade geral é capaz de reproduzir a gravitação newtoniana nos limites apropriados.

## 3.6 Derivada Covariante

A esta altura, nota-se claramente que o operador derivada convencional não é um bom operador para tensores, uma vez que sua aplicação nem sempre retorna um tensor, pois dado um tensor tal que:

$$T'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} T^{\nu}, \quad (3.59)$$

que se derivarmos em relação a  $x^\lambda$ :

$$\frac{\partial T'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu \right) \quad (3.60)$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial T^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} T^\nu. \quad (3.61)$$

Assim como na conexão, temos um termo extra que não se comporta como tensor. Porém, usaremos a (3.61) para construir um tensor. Diferenciando com relação a  $x'^\mu$  a identidade  $\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\lambda$ , podemos fazer que:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left( \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} (\delta_\nu^\lambda) \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left( \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}, \quad (3.64)$$

usando esse resultado em (3.41), podemos reescrever a transformação da conexão como:

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}. \quad (3.65)$$

Agora, diante disto, podemos usar a (3.65) e a (3.59) para ver que:

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} T'^\mu = \left( \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \right) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} T^\kappa \quad (3.66)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \delta^\tau_\kappa \Gamma^\rho_{\tau\sigma} T^\kappa - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \delta^\rho_\kappa T^\kappa \quad (3.67)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} T^\tau - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T^\rho, \quad (3.68)$$

o termo não-homogêneo que aparece é o mesmo de (3.61), assim somando a (3.68) com a (3.61), ficamos com:

$$\frac{\partial T'^\lambda}{\partial x'^\nu} + \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} T'^\mu = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left( \Gamma^\rho_{\tau\sigma} T^\tau + \frac{\partial T^\nu}{\partial x^\sigma} \right), \quad (3.69)$$

a (3.69) se transforma de acordo com um tensor, assim, o termo a esquerda é definido como a *derivada covariante* de um tensor contravariante, de modo que:

$$\nabla_\nu T^\lambda = \frac{\partial T^\lambda}{\partial x'^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu. \quad (3.70)$$

De uma forma informal, a derivada covariante funciona como um operador que generaliza o conceito da derivada convencional do espaço plano para o espaço curvo. Esta é importante pois serve para mostrar as variações sofridas por tensores, de modo que será



útil na definição de uns conceitos que veremos mais a frente. Vale ressaltar que a derivada covariante é um tensor e que na ausência de gravitação, *i.e.*  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ , esta se reduz a derivada convencional (WEINBERG, 1972).

De forma análoga, podemos fazer o mesmo desenvolvimento para um tensor covariante e definir a derivada covariante de um tensor covariante como:

$$\nabla_{\nu} T_{\lambda} = \frac{\partial T_{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} T_{\mu}, \quad (3.71)$$

e assim, conforme feito para tensores mistos, para um caso geral, escrevemos a derivada covariante como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} T^{\mu\nu\lambda\dots}_{\rho\sigma\tau\dots} = & \frac{\partial T^{\mu\nu\lambda\dots}_{\rho\sigma\tau\dots}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} T^{\beta\nu\lambda\dots}_{\rho\sigma\tau\dots} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\nu} T^{\mu\beta\lambda\dots}_{\rho\sigma\tau\dots} + \dots \\ & - \Gamma_{\rho\gamma}^{\beta} T^{\mu\nu\lambda\dots}_{\beta\sigma\tau\dots} - \Gamma_{\sigma\gamma}^{\beta} T^{\mu\nu\lambda\dots}_{\rho\beta\tau\dots} - \dots \end{aligned} \quad (3.72)$$

Um resultado importante é a respeito da derivada covariante da métrica ser nula, podemos verificar isso fazendo:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} g_{\rho\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} g_{\mu\rho}, \quad (3.73)$$

usando a (3.35):

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} g_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g_{\rho\nu} g^{\rho\gamma} \left( -\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right), \quad (3.75)$$

com isso, a (3.73) pode ser escrita como:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (3.76)$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (3.77)$$

logo:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.78)$$

### 3.6.1 Derivada covariante ao longo de uma curva

Se formos lidar com um tensor qualquer  $T(\tau)$  definido apenas sob uma curva parametrizada  $x^{\mu}(\tau)$  ao invés dos campos tensoriais, definidos em todo o espaço-tempo que vimos até agora, precisaremos definir um outro operador, uma vez que não faz sentido

usar a derivada covariante com relação a  $x^\mu$  (WEINBERG, 1972). Seja um tensor  $T^\mu(\tau)$  que se transforma conforme:

$$T'^\mu(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu(\tau) \Big|_{x^\nu = x^\nu(\tau)}, \quad (3.79)$$

derivando em relação a  $\tau$ , tem-se que:

$$\frac{dT'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dT^\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} T^\nu(\tau). \quad (3.80)$$

O termo não-homogêneo acima pode ser anulado com o auxílio da conexão, assim como foi feito em (3.65). Assim, seguindo o raciocínio anterior, utilizado para obter (3.70), vamos ter que a *derivada covariante ao longo de uma curva* de um tensor contravariante se dá como:

$$\frac{DT^\lambda}{D\tau} = \frac{dT^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} T^\nu, \quad (3.81)$$

assim como a derivada covariante ao longo de uma curva de um tensor covariante:

$$\frac{DT_\mu}{D\tau} = \frac{dT_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} T_\lambda. \quad (3.82)$$

### 3.6.2 Transporte Paralelo

Algo importante a se notar quando formos realizar operações com tensores e vetores no espaço curvo é que, diferente do espaço euclidiano convencional, os vetores mudam conforme estes se movem pelo espaço. E, quando queremos comparar dois vetores, devemos colocá-los no mesmo ponto do espaço, porém estes devem se manter constantes. O conceito de se mover um vetor ao longo do espaço mantendo-o constante é chamado de *transporte paralelo*. A principal diferença entre o espaço euclidiano e o espaço curvo é que no espaço curvo o resultado de um transporte paralelo entre dois pontos depende do caminho percorrido (CARROLL, 1997).

Vamos definir o transporte paralelo de um tensor  $T$  qualquer ao longo de uma curva parametrizada  $x^\mu(\tau)$  como:

$$\frac{DT^\mu}{D\tau} = 0, \quad (3.83)$$

que se compararmos com as (3.81) e (3.82), teremos as seguintes relações para tensores contravariantes e covariante, respectivamente:

$$\frac{dT^\lambda}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} T^\nu \quad (3.84)$$

$$\frac{dT_\mu}{d\tau} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} T_\lambda, \quad (3.85)$$

deixando evidente a dependência da conexão no transporte paralelo. Uma outra derivação da noção de geodésica surge do fato de que o vetor tangente a um caminho  $x^\lambda(\tau)$  é  $\frac{dx^\lambda}{d\tau}$ , e a condição para ser transportado paralelamente é:

$$\frac{D}{D\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (3.86)$$

logo, usando a definição (3.81), nos retorna:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.87)$$

Que é a equação da geodésica vista em (3.7).

## 4 A Gravitação como Curvatura

Conforme vimos, a geometrização da gravitação irá tratar a gravitação como a curvatura do espaço-tempo, ou seja, para medirmos e analisar a interação gravitacional, basta olharmos para a curvatura. Com o aparato matemático que desenvolvemos no capítulo anterior, agora somos capazes de discutir de forma apropriada essa curvatura. A ideia por trás de se medir o quão “reto” é um espaço, é verificar se um transporte paralelo de um vetor por um caminho fechado implica no fato de que este vetor transportado se mantém inalterado.

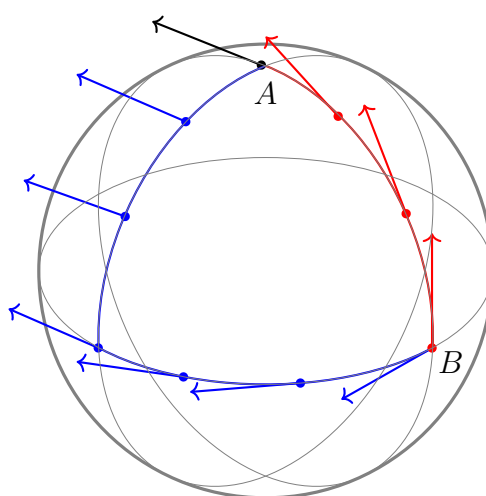


Figura 3 – Vetor em transporte paralelo entre  $A$  e  $B$ , por dois caminhos diferentes, numa superfície curva qualquer.

A figura 3 representa um vetor (em preto) em transporte paralelo por um caminho vermelho e outro em azul. Podemos ver claramente que, em um espaço curvo, o transporte paralelo de um vetor a um mesmo ponto final, feito por caminhos diferentes, resulta numa diferença entre os vetores finais. No espaço plano, essa diferença não existiria, por esse motivo que realizamos as operações com vetores sem nos importarmos muito com essa questão, pois todos os vetores do espaço euclidiano fazem parte do mesmo espaço tangente.

### 4.1 Tensor de Riemann

Uma maneira de analisar a curvatura de um espaço, em outras palavras, de se verificar a presença ou não de gravitação no espaço, é através da construção de um tensor que meça a não comutação da derivada covariante, uma vez que essa, devido ao transporte paralelo, expressa a curvatura ou não de um espaço.

Se calcularmos o comutador da derivada covariante aplicada em um campo vetorial qualquer, teremos que<sup>7</sup>:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] T^\mu = \nabla_\alpha(\nabla_\beta T^\mu) - \nabla_\beta(\nabla_\alpha T^\mu) \quad (4.1)$$

$$= \nabla_\alpha \left( \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\lambda\beta}^\mu T^\lambda \right) - \nabla_\beta \left( \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu T^\lambda \right) \quad (4.2)$$

$$= \frac{\partial^2 T^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \frac{\partial T^\rho}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\rho} \quad (4.3)$$

$$+ \frac{\partial (\Gamma_{\lambda\beta}^\mu T^\lambda)}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\rho T^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\mu T^\lambda \quad (4.4)$$

$$- \frac{\partial^2 T^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \Gamma_{\rho\beta}^\mu \frac{\partial T^\rho}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\rho \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\rho} \quad (4.5)$$

$$- \frac{\partial (\Gamma_{\lambda\alpha}^\mu T^\lambda)}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\rho T^\lambda + \Gamma_{\beta\alpha}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\mu T^\lambda, \quad (4.6)$$

lembrando da comutação das derivadas parciais e da simetria dos índices subscritos das conexões, temos que a maioria dos termos se cancelam, resultando em:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] T^\mu = \left( \frac{\partial \Gamma_{\lambda\beta}^\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\rho \right) T^\lambda. \quad (4.7)$$

O termo em parenteses será definido como *tensor de Riemann*, tal que:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] T^\mu = R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} T^\lambda, \quad (4.8)$$

onde:

$$R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\lambda\beta}^\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\rho. \quad (4.9)$$

Caso não haja curvatura no espaço, as derivadas covariantes comutam e, pelo fato de não haver gravitação, os termos da conexão se anulam e a (4.8) se reduz a comutação de derivadas parciais.

#### 4.1.1 Propriedades do Tensor de Riemann

em um primeiro instante, um tensor com 4 índices, com estes variando de 0 a 3, pode assustar, pois, *a priori*, teríamos 256 termos independentes ( $4^4 = 256$ ). Por sorte, o tensor de Riemann possui algumas simetrias que reduzem esse número consideravelmente. A maneira mais simples para verificar isto é com o tensor na sua forma totalmente covariante (CARROLL, 1997), ou seja<sup>8</sup>:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \quad (4.10)$$

<sup>7</sup> Aqui foi usada a seguinte identidade:  $\nabla_\alpha(\nabla_\beta T^\mu) = \frac{\partial(\nabla_\beta T^\mu)}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu(\nabla_\beta T^\lambda) - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho(\nabla_\rho T^\mu)$

<sup>8</sup> De forma simplificar a escrita, a partir daqui adotaremos a seguinte notação:  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

Considerando os componentes do tensor no sistema de referências localmente inerciais, as conexões em (4.9) se anulam, mas as derivadas não, ficando então:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) \quad (4.11)$$

Que usando a definição (3.23) e fazendo com que  $\partial_\mu g^{\lambda\tau} = 0$  no sistema de coordenadas escolhido, temos que:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\rho\lambda}g^{\lambda\tau}(\partial_\mu\partial_\nu g_{\sigma\tau} + \partial_\mu\partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu\partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\mu g_{\sigma\tau} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu\partial_\tau g_{\mu\sigma}) \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma}). \quad (4.13)$$

Com o tensor de Riemann escrito como em (4.13), podemos notar de imediato que  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  é antissimétrico nos dois primeiros índices (CARROLL, 1997):

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad (4.14)$$

assim como nos últimos dois índices:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad (4.15)$$

como consequência destas duas, temos também que:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (4.16)$$

Podemos observar uma simetria que surge a partir da soma do tensor com os três últimos índices permutados:

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\rho\partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\mu}) \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial_\rho\partial_\sigma g_{\nu\mu} + \partial_\rho\partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\mu g_{\rho\sigma}), \quad (4.17) \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho\partial_\nu g_{\rho\nu} + \partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu}) \end{aligned}$$

simplificando os termos e usando da simetria da métrica e da comutação da derivada parcial, a (4.17) se reduz a:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (4.18)$$

É verdade que foi usado um sistema de coordenadas específico para obter esses resultados, mas como estamos tratando de um tensor, essas simetrias valem para todos os sistemas de coordenadas.

Desta forma, essas simetrias reduzem notavelmente o número de termos independentes de 256 para apenas 20 termos (D'INVERNO, 1992). Podemos ainda analisar mais

uma simetria que surge de uma identidade diferencial e que, ao invés de restringir o número de termos independentes, vai limitar certos valores em alguns pontos. O argumento se inicia novamente adotando o referencial em que  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ , pois nesse a derivada covariante se reduz a derivada parcial. Assim a derivada covariante do tensor de Riemann pode ser escrita como:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \partial_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}), \quad (4.19)$$

permutando os três primeiros índices de (4.19) e somando, obteremos:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} \\ &\quad + \partial_\rho \partial_\mu \partial_\lambda g_{\sigma\nu} - \partial_\rho \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\rho \partial_\nu \partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\rho \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} \\ &\quad + \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\rho g_{\lambda\mu} + \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\rho}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

novamente, por se tratar de um tensor, esse resultado vale para qualquer sistema de coordenadas. A (4.20) é conhecida como *identidade de Bianchi*.

#### 4.1.2 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

O tensor de Riemann é útil também para construir outros tensores que farão papéis importantes quando estivermos tentando de fato escrever a gravitação em função da curvatura. Um deles é o *tensor de Ricci* que simplesmente é o tensor de Riemann contraído em dois índices, *i.e.*:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu}, \quad (4.21)$$

valendo-se das propriedades do tensor de Riemann podemos ver que o tensor de Ricci é simétrico (D'INVERNO, 1992):

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (4.22)$$

Outra grandeza que surge a partir do tensor de curvatura é o escalar de curvatura, que é apenas um escalar que se relaciona com a curvatura do espaço-tempo. Este é definido como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (4.23)$$

que possui uma forma de identidade de Bianchi quando contraímos dois índices em (4.20) e usando o resultado em (3.78) (CARROLL, 1997):

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0 \quad (4.24)$$

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0, \quad (4.25)$$

ou ainda:

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\rho R. \quad (4.26)$$

Esses dois juntos, definem o *tensor de Einstein*, tal que (D'INVERNO, 1992):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (4.27)$$

que também obedece a um tipo de identidade de Bianchi (CARROLL, 1997):

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (4.28)$$

## 4.2 Equação de Campo de Einstein

Vamos agora procurar uma forma de encontrar a equação que descreva a dinâmica do campo gravitacional. A abordagem para deduzir a equação de campo será através de algumas suposições e conjecturas, de forma mais qualitativa e utilizando da já estabelecida gravitação newtoniana (WEINBERG, 1972).

Conforme vimos em (3.58), podemos relacionar o campo gravitacional como sendo a métrica do espaço, enquanto que na gravitação newtoniana o campo com baixa intensidade é dado por uma equação de Poisson do tipo:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (4.29)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de massa,  $G$  é a constante gravitacional e  $\phi$  é o potencial gravitacional (GREINER, 2006). Essa equação nos dá que a derivada segunda do campo gravitacional se relaciona com a densidade de matéria, ou ainda, tem como fonte a informação dinâmica da matéria. Assim sendo, para a equação de campo de Einstein, vamos buscar uma equação a qual contenha a como fonte a informação dinâmica da matéria e que possua uma segunda derivada da métrica do espaço.

Conforme vimos na seção 4.1, os tensores que definem a curvatura do espaço são todos expressos em função de derivadas primeira e produtos da conexão. A conexão, por sua vez, é dada em função da derivada primeira da métrica. Dessa forma, os tensores de curvaturas são relacionados com a derivada segunda da métrica e, como também são entidades ligadas diretamente a curvatura do espaço, são prováveis candidatos para campo gravitacional.

Dos tensores que vimos, o melhor pretendente a campo gravitacional é o tensor de Ricci, uma vez que o escalar de curvatura tem pouca informação e, por outro lado, o tensor de Riemann tem índices demais para que possa se relacionar com a massa de forma que essa seja acoplada como fonte da equação. Vale lembrar também que, assim como o tensor de Ricci, a métrica, que faz as vezes de potencial gravitacional, é um tensor simétrico com dois índices. De tal maneira, que uma equação com o tensor de Ricci possui o número certo de componentes para se determinar todos os componentes da métrica.



### 4.2.1 Tensor Momento-Energia

Por outro lado, para se ter uma equação em termos do tensor de Ricci será necessário que a fonte seja um tensor de segunda ordem e que esta se relacione com a massa, assim como na gravitação newtoniana. Conforme vimos no capítulo 2, o quadrado do quadrimomento de uma partícula equivale a massa dessa partícula e, ainda, a (2.118) nos dá uma relação entre energia, massa e momento. De forma que a fonte do campo descreva uma distribuição de matéria e não apenas uma partícula, vamos construir um tensor de momento e energia  $T^{\mu\nu}$  que corresponderá ao fluxo do quadrimomento  $P^\mu$  através de uma superfície com  $x^\nu$  constante (CARROLL, 1997).

Começaremos considerando o tipo mais simples de matéria, chamado de poeira e é definido como um conjunto de partículas que não interagem entre si e que estão em repouso uma com as outras. Por definição, todas as partículas terão a mesma quadrivelocidade  $U^\mu$  em qualquer referencial inercial. Tomando  $\rho_0 = \rho_0(x)$  como a *densidade própria* do fluxo de matéria, *i.e.* a densidade medida por um observador comóvel, o tensor mais simples que pode ser construído para este tipo de matéria é da forma:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu, \quad (4.30)$$

que é o tensor de momento-energia da poeira (D'INVERNO, 1992). Uma rápida investigação nos leva a perceber que:

$$T^{00} = \rho_0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \rho_0 \frac{dt^2}{d\tau^2} = \gamma^2 \rho_0, \quad (4.31)$$

assim, a componente  $T^{00}$  pode ser vista como a densidade de energia relativística da matéria. Uma vez compreendido o tensor de momento-energia de poeira, podemos definir o mesmo para um fluido perfeito. Pode-se compreender como fluido perfeito aquele que é isotrópico se observado do referencial de repouso, como consequência, teremos que  $T^{\mu\nu}$  deve ser diagonal, pois não há fluxo de qualquer componente momento em qualquer direção ortogonal (CARROLL, 1997). Ademais, as componentes espaciais não nulas devem ser iguais, isto é,  $T^{11}$ ,  $T^{22}$  e  $T^{33}$ , de forma que as componentes independentes são apenas  $T^{00}$  e  $T^{ii}$ . Escolheremos a primeira para ser a densidade  $\rho$  e as últimas para serem a pressão  $p$ , assim o tensor é tal que:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Sabendo que, de acordo com a (4.30),  $T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu$  nos retorna:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho + p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

basta subtrairmos  $p\eta^{\mu\nu}$  para obtermos a (4.32). Sendo assim, a forma geral para o tensor momento-energia de um fluido perfeito é (CARROLL, 1997):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - p\eta^{\mu\nu}. \quad (4.34)$$

Uma propriedade importante, além de ser simétrico, é que  $T^{\mu\nu}$  se conserva, ou em outras palavras o divergente é nulo:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.35)$$

## 4.2.2 Estrutura da Equação de Campo

Agora que já construímos um tensor de dois índices que servirá de fonte para nossa equação podemos seguir com a construção da equação em si. Um *ansatz* inicial seria que  $R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ , onde  $k$  seria uma constante de proporcionalidade. Porém devido a (4.35) devemos ter que o momento se conserve, ou seja:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.36)$$

onde aqui usamos um  $T^{\mu\nu}$  genérico. Como consequência, é necessário que  $\nabla^\mu R_{\mu\nu}$  se anule também, contudo o tensor de Ricci não obedece a essa propriedade, conforme já visto em (4.27). Porém a (4.27) nos diz que o tensor  $G_{\mu\nu}$ , que é construído a partir do tensor de Ricci, possui divergência nula, portanto nos leva imediatamente a escrever que:

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (4.37)$$

onde, aqui, o  $T_{\mu\nu}$  é qualquer tensor momento-energia. Reescrevendo, teremos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

Esta equação cumpre todos os requisitos necessários para ser uma equação de campo da métrica, no lado direito é uma relação covariante de densidade de energia e momento na forma de uma simetria que se conserva e no lado esquerdo um tensor construído a partir das derivadas primeiras e segundas da métrica (CARROLL, 1997).

Resta saber se, de fato, esta descreve a gravitação que observamos. Para isso, vamos escrever a equação (4.38) de forma a obter o seu traço:

$$g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = k g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (4.39)$$

Definindo o traço do tensor momento-energia como  $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  e vendo que o traço de  $\delta_\nu^\mu$  vale 4, ficamos com:

$$R = -kT, \quad (4.40)$$

substituindo esse resultado em (4.38) leva a:

$$R_{\mu\nu} = k \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (4.41)$$

Em um primeiro instante, vamos verificar se essa equação se reduz a (4.29) no regime não relativístico, ou seja, esta prevê a gravitação Newtoniana no limite de campo fraco, independente do tempo para partículas se movendo a baixas velocidades. Lembrando que, conforme visto na seção 3.5, temos que:

$$g_{00} = 1 + h_{00} \quad (4.42)$$

$$g^{00} = 1 - h_{00}, \quad (4.43)$$

então:

$$T = g^{00} T_{00} = T_{00}, \quad (4.44)$$

substituindo em (4.41), nos dá:

$$R_{00} = \frac{1}{2} k T_{00}. \quad (4.45)$$

Esta é uma equação que relaciona as derivadas da métrica com a densidade de energia. Porém, queremos achar a expressão explícita em termos da métrica e para isso precisamos avaliar  $R_{00} = R_{0\lambda 0}^\lambda$ . Como  $R_{000}^0 = 0$ , pois estamos tomando o caso da métrica estática no limite não-relativístico, basta determinar  $R_{0i0}^i$ , portanto:

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{j0}^i + \Gamma_{j\lambda}^i \Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{j0}^\lambda, \quad (4.46)$$

como estamos trabalhando no limite de campos estáticos, o segundo termo de (4.46), que é uma derivada temporal, anula-se. E os dois últimos termos podem ser desconsiderados, pois são da forma  $\Gamma^2$ , logo só contribuem em segunda ordem. Com isso, resta-nos:

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i, \quad (4.47)$$

que resulta em:

$$R_{00} = R_{0i0}^i \quad (4.48)$$

$$= \partial_i \left( \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right) \quad (4.49)$$

$$= -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \quad (4.50)$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (4.51)$$

$$= \nabla^2 \phi, \quad (4.52)$$

coleccionando os resultados até agora, podemos usar as equações (4.40), (4.44) e (4.52) para escrevemos a seguinte relação:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{2} k \rho = k \rho \quad (4.53)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{k \rho}{2}, \quad (4.54)$$

substituindo a (4.54) em (4.29), podemos concluir que a constante  $k$  equivale a:

$$k = 8\pi G, \quad (4.55)$$

assim podemos escrever a equação de campo de Einstein como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.56)$$

Essa equação nos diz como o espaço-tempo se curva sob a presença de uma distribuição de matéria e/ou energia. Nota-se que se trata de uma equação não-linear de difícil resolução de uma forma geral.

### 4.3 Uma outra abordagem

As equações de campo podem ser obtidas partindo de um outro raciocínio, a partir do princípio variacional. Através dessa formulação, as eqs. (4.56) foram obtidas primeiro por David Hilbert. A ideia de Hilbert consistiu em tentar construir a Lagrangiana a partir do escalar de Ricci, visto que este é construído a partir da métrica (CARROLL, 1997). Para isso, precisamos construir a ação do campo gravitacional  $S_g$  e a ação atrelada à distribuição da matéria  $S_m$ , de modo a ter uma ação total  $S$  do sistema e então aplicar o princípio de mínima ação:

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0, \quad (4.57)$$

assim, a ação do campo, em um volume de espaço-tempo  $\Omega$  é definida por:

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.58)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a Lagrangiana e  $g$  é o determinante da métrica do espaço curvilíneo em questão e  $\sqrt{-g}$  desempenha o papel do *Jacobiano* conforme numa transformação de coordenadas retangulares para coordenadas curvas. Como a métrica do espaço-tempo deve ser uma matriz diagonal com um termo com sinal diferente dos outros três, o determinante  $g$  será negativo, para isso utilizamos o sinal de menos no Jacobiano, de forma a termos a raiz de um número positivo<sup>9</sup>.

A abordagem consiste em escrever a ação como função do escalar de curvatura  $R$  somado à alguma integral, como<sup>10</sup> por enquanto.:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x + \int_{\Omega} \frac{(\partial \cdot \sqrt{-g} w^{\mu})}{\partial x^{\mu}} d^4x. \quad (4.59)$$

Como estamos interessados na variação da ação, a fim de utilizar o princípio de mínima ação, a última integral em (4.59) pode ser ignorada, pois, usando o *Teorema de Gauss*, sabemos que ela tende zero na fronteira do espaço  $\Omega$ , assim ficamos com:

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \delta \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.60)$$

a ação presente em (4.60) é chamada de *ação de Einstein-Hilbert*, tal que:

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} R d^4x, \quad (4.61)$$

expandindo o escalar de curvatura:

$$\delta \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Omega} [R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu})] d^4x. \quad (4.62)$$

O termo  $\delta(\sqrt{-g})$  pode ser reescrito como:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g} \delta g = \frac{-\delta g}{2\sqrt{-g}}, \quad (4.63)$$

e o termo  $\delta g$  em (4.63) pode ser expresso por:

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) = -g g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}), \quad (4.64)$$

e assim a (4.63) fica:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{g g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})}{2\sqrt{-g}} = -\frac{\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})}{2}. \quad (4.65)$$

<sup>9</sup> O produto  $\mathcal{L} \sqrt{-g}$  é denominado densidade lagrangiana.

<sup>10</sup> De forma a manter as contas menos carregadas, omitiremos o fator  $-\frac{1}{16\pi G}$

Por fim, o lado direito da (4.62) se torna:

$$= \int_{\Omega} [R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})] d^4x \quad (4.66)$$

$$= \int_{\Omega} \left[ R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) - R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\frac{\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})}{2} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \right] d^4x \quad (4.67)$$

$$= \int_{\Omega} \left[ R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) - R\frac{\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})}{2} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \right] d^4x \quad (4.68)$$

$$= \int_{\Omega} \left[ \left( R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}R}{2} \right) \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \right] d^4x \quad (4.69)$$

$$= \int_{\Omega} \left[ \left( R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}R}{2} \right) \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) \right] d^4x + \delta \int_{\Omega} [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})] d^4x. \quad (4.70)$$

Agora, reescrevendo o tensor de Ricci na última integral em (4.70) como<sup>11</sup>:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\lambda}, \quad (4.71)$$

usando o princípio de equivalência, podemos escolher um sistema de coordenadas em que  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  seja nulo sem que a física mude. Adotando tal sistema, o tensor de Ricci fica:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad (4.72)$$

pois as derivadas não se anulam. Com isso, escrevemos:

$$g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} [\delta(\partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) - \delta(\partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})] \quad (4.73)$$

$$= [g^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) - g^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})]. \quad (4.74)$$

Lembrando que nas coordenadas adotadas não há distinção entre as derivadas covariantes e as comuns, temos que:

$$\partial_{\lambda}g^{\mu\nu} = 0, \quad (4.75)$$

deste modo, a (4.74) pode ser reescrita como:

$$g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) = \partial_{\lambda}V^{\lambda}, \quad (4.76)$$

onde  $V^{\lambda} = g^{\mu\lambda}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) - g^{\mu\nu}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})$ . Sabendo que podemos escrever que o termo na direita conforme:

$$\partial_{\lambda}V^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}V^{\lambda}). \quad (4.77)$$

Podemos colecionar todos esse resultados e expressar a última integral em (4.70) como:

$$\int_{\Omega} \partial_{\lambda}(\sqrt{-g}V^{\lambda}) d^4x = \oint_{d\Omega} dA_i(\sqrt{-g}V^i), \quad (4.78)$$

<sup>11</sup> Usamos aqui a (4.9) e a (4.21)

aqui utilizamos o teorema da divergência. Como essa integral é calculada na fronteira do espaço, *i.e.* no infinito, esta é nula. Assim, a variação da ação do campo é dada por<sup>12</sup>:

$$\delta S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}). \quad (4.79)$$

No caso de estarmos sem matéria, *i.e.* sem as fontes geradoras do campo ( $\delta S_m = 0$ ), a (4.57) se reduz a:

$$\delta S = \delta S_g = 0, \quad (4.80)$$

comparando com a (4.79), temos como resultado a relação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (4.81)$$

que é a chamada equação de campo na ausência de fontes ou equação de campo para o vácuo (WEINBERG, 1972).

Agora, calculando a ação da matéria de um sistema geral, sabendo que esta pode ser descrita por uma densidade de lagrangiana do tipo:

$$S_m = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \mathcal{L}_m (g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}) d^4x, \quad (4.82)$$

como queremos a variação da ação, podemos calcular  $\delta S_m$  conforme<sup>13</sup>:

$$\delta S_m = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} \partial_{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}) \right] d^4x. \quad (4.83)$$

A integral sobre o último termo de (4.83), pode ser resolvida através de integração por partes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} \partial_{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}) d^4x = \\ \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} \delta g^{\mu\nu} \right) - \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} \right) d^4x. \end{aligned} \quad (4.84)$$

O primeiro termo do lado esquerdo de (4.84) pode ser reescrito como uma integral de área na fronteira do volume do espaço-tempo (usando o teorema de Gauss). Como estamos integrando no espaço inteiro essa integral se anula nas fronteiras o que permite escrever a (4.83) como

$$\delta S_m = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_{\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} \right) \right] d^4x, \quad (4.85)$$

definindo um termo  $T_{\mu\nu}$  como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.86)$$

<sup>12</sup> Agora retornamos com o fator  $-\frac{1}{16\pi G}$ .

<sup>13</sup> Aqui usaremos a notação  $g^{\mu\nu},\alpha = \partial g^{\mu\nu} / \partial x^{\alpha}$ .

podemos expressar a ação da matéria como:

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.87)$$

Portanto, juntando esses resultados, o princípio da mínima ação para o campo gravitacional com uma distribuição de matéria é ser escrito utilizando a variação da ação de Einstein-Hilbert (4.61) mais a variação da ação da matéria (4.87):

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (4.88)$$

sendo as integrais avaliadas sob a mesma região  $\Omega$  e possuindo a mesma variação  $\delta g^{\mu\nu}$ , podemos agrupá-las em uma única integral:

$$\int_{\Omega} \left[ -\frac{1}{16\pi G} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \quad (4.89)$$

Como o traço da métrica ( $g$ ) e a variação  $\delta g^{\mu\nu}$  não são nulos, a única forma de (4.89) ser válida é se tivermos o termo entre colchetes igual a zero, ou seja:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.90)$$

Que é exatamente a equação de campo gravitacional com uma distribuição de matéria obtida na derivação da seção anterior (WEINBERG, 1972).



## 5 Cosmologia Homogênea e Isotrópica

A teoria da relatividade desenvolvida no capítulo anterior pode ser resumida como a definição do espaço-tempo ser uma variedade quadridimensional a qual é definida por uma métrica,  $g_{\mu\nu}$ . E esta métrica está relacionada com a distribuição de matéria no espaço-tempo de acordo com a equação de campo (4.56) (WALD, 1984).

Até então, apenas vimos a equação de campo de Einstein sem aplicar a nada de forma específica, porém uma das principais questões é: qual solução da equação de campo descreve o espaço-tempo e universo, ou ao menos um modelo de Universo idealizado, que nós observamos? Para responder a essa questão, primeiro precisaremos de dados observacionais para corroborar as suposições necessárias, com isso poderemos resolver a equação de campo e então fazer previsões sobre a dinâmica do universo.

Neste capítulo, iremos estudar a estrutura do Universo, conforme prevista pela relatividade geral, assumindo que este é homogêneo e isotrópico, espacialmente, em grandes escalas. Iremos demonstrar, posteriormente, o que essas suposições significam.

### 5.1 Espaços Simétricos

Para entendermos melhor a cosmologia, precisamos, antes, falar sobre a teoria matemática de *espaços simétricos*, em especial ao tratar de espaços *maximamente* simétricos. A ideia é usar as simetrias de um espaço métrico, descritas de forma covariante, para determinar as propriedades da métrica que emergem de tais simetrias.

Suponha que um espaço possua métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  que se mantém invariante dada uma transformação de coordenadas  $x \rightarrow x'$ , podemos fazer que:

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x), \text{ para todo } x, \quad (5.1)$$

como é válido que em qualquer ponto temos que a métrica é (WEINBERG, 1972):

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \Leftrightarrow g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x'), \quad (5.2)$$

teremos, para o caso em que (5.1) é válida, a métrica se dá por (WEINBERG, 1972):

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x'). \quad (5.3)$$

Qualquer transformação  $x \rightarrow x'$  que satisfaça a (5.3) é chamada de *isometria*.

É fato que a (5.3) é uma grande restrição à  $x'^{\mu}(x)$ , porém pode-se fazer que essa condição é válida para uma transformação infinitesimal de coordenadas:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x) \quad \text{onde } \epsilon \ll 1, \quad (5.4)$$

com isso, a (5.3) em primeira ordem fica:

$$0 = \frac{\partial \xi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\rho}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} g_{\rho\nu}(x) + \xi^{\mu}(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\mu}}, \quad (5.5)$$

que pode ser reescrito, usando  $\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma} \xi^{\mu}$ , como:

$$0 = \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \xi^{\mu} \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (5.6)$$

$$= \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - 2\xi^{\mu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \quad (5.7)$$

$$= \nabla_{\rho} \xi_{\sigma} + \nabla_{\sigma} \xi_{\rho}. \quad (5.8)$$

Qualquer campo vetorial  $\xi_{\sigma}(x)$  que satisfaça a relação (5.8) é chamado de *vetor de Killing* da métrica (WEINBERG, 1972). E com isso, ao invés de ficarmos determinando as isometrias infinitesimais basta determinarmos os vetores de Killing da métrica, de forma que o espaço vetorial gerado pelos vetores de Killing determina as isometrias infinitesimais da métrica.

Um espaço métrico é dito *homogêneo* se existe uma isometria infinitesimal (5.4) que leve um ponto qualquer  $X$  a qualquer outro ponto na sua vizinhança imediata. Em outras palavras, a métrica deve admitir vetores de Killing que em qualquer ponto aceite todos os valores possíveis (WEINBERG, 1972). Particularmente, podemos escolher, em um espaço de dimensão  $N$ , um conjunto de vetores de Killing  $\xi_{\lambda}^{(\mu)}(x; X)$  onde:

$$\xi_{\lambda}^{(\mu)}(X; X) = \delta^{\mu}_{\lambda}. \quad (5.9)$$

Um espaço métrico é dito *isotrópico* ao redor de um ponto  $X$  se existe uma isometria infinitesimal que mantenha o ponto  $X$  fixo, ou seja  $\xi^{\lambda}(X) = 0$ , e se a primeira derivada  $\nabla_{\nu} \xi_{\lambda}(X)$  puder assumir todos os valores possíveis. Assim, para um espaço de dimensão  $N$  podemos escolher um conjunto de  $N(N-1)/2$  vetores de Killing  $\xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(x; X)$  onde:

$$\xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(x; X) \equiv -\xi_{\lambda}^{(\nu\mu)}(x; X) \quad (5.10)$$

$$\xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(X; X) \equiv 0 \quad (5.11)$$

$$\nabla_{\rho} \xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(x; X) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(x; X) \right)_{x=X} \equiv \delta^{\mu}_{\lambda} \delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\mu}_{\rho} \delta^{\nu}_{\lambda}. \quad (5.12)$$

Além disso, existem espaços que são isotrópicos em todos os pontos, de modo que neste caso os vetores de Killing  $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)$  e  $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X + dX)$  devem satisfazer as condições acima. Se usarmos a (5.11) podemos fazer que:

$$0 = \frac{\partial}{\partial X^\rho} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(X; X) \quad (5.13)$$

$$= \left( \frac{\partial \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)}{\partial x^\rho} \right)_{x=X} + \left( \frac{\partial \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)}{\partial X^\rho} \right)_{x=X}. \quad (5.14)$$

que nos dá:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\rho} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) \right)_{x=X} = -\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho + \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\lambda, \quad (5.15)$$

e com isso, fica claro que só se pode construir um vetor de Killing  $\xi_\lambda(x)$  que assuma um valor arbitrário qualquer em  $x = X$ , precisa-se apenas que:

$$\xi_\lambda(x) = \frac{a_\nu}{N-1} \frac{\partial}{\partial X^\rho} \xi_\lambda^{(\rho\nu)}(x; X). \quad (5.16)$$

Assim, qualquer espaço que seja isotrópico em qualquer ponto é também homogêneo (WEINBERG, 1972).

Um espaço simétrico de dimensão  $N$  terá no máximo  $N(N+1)/2$  vetores de Killing que sejam linearmente independentes. Se a métrica de um espaço permitir apenas um número de vetores de Killing menor que  $N(N+1)/2$ , este espaço será chamado de *maximamente simétrico* (WEINBERG, 1972). Neste caso particular o espaço necessariamente será homogêneo e isotrópico em relação a um ponto  $X$ . Temos também que se um espaço for isotrópico em relação a qualquer ponto, ele será, obrigatoriamente, um espaço maximamente simétrico (WEINBERG, 1972).

Com um pouco de manipulação algébrica das propriedades dos vetores de Killing, pode-se chegar a conclusão da característica principal de um espaço isotrópico em qualquer ponto e homogêneo, *i.e.* maximamente simétrico, este possui uma curvatura que é constante por todo o espaço (WALD, 1984). Em termos do tensor de Riemann e do tensor de Ricci, um espaço maximamente simétrico é caracterizado por (WEINBERG, 1972):

$$R_{\sigma\rho} = -(N-1)K g_{\sigma\rho} \quad (5.17)$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}), \quad (5.18)$$

onde  $K$  é a constante de curvatura definida como:

$$K \equiv -\frac{R}{N(N-1)}, \quad (5.19)$$

que iremos normalizar, de forma que esta assuma valores  $K = -1$ ,  $K = 0$  ou  $K = 1$ .

Os espaços serão diferenciados em apenas três tipos, distintos apenas pelo sinal da constante de curvatura  $K$ , pois quaisquer dois espaços de curvatura constante, de

mesma dimensão, e com mesma assinatura métrica, *i.e.* mesmo número de autovalores positivos, negativos e nulos, e com o mesmo  $K$  devem ser isométricos (WEINBERG, 2008). Com isso, basta apenas analisar os possíveis valores de  $K$ . O espaço maximamente simétrico com curvatura nula ( $K = 0$ ) é o espaço plano que conhecemos normalmente, a sua geometria é descrita pelo elemento de linha:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (5.20)$$

O outro tipo de espaço será determinado pela sua curvatura positiva ( $K > 0$ ) e este é conhecido como espaço de De Sitter. Todos os valores positivos de  $K$  se resumem em espaços definidos como uma superfície num espaço euclidiano quadridimensional delimitado por uma esfera tridimensional, ou ainda, cuja as coordenadas respeitem (WALD, 1984):

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2 , \quad (5.21)$$

e a métrica é da forma:

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (5.22)$$

Por último, teremos o espaço caracterizado por uma curvatura negativa ( $K < 0$ ), conhecido como espaço anti-De Sitter. De forma similar, os espaços de curvatura negativa estão delimitados pelas superfícies de hiperboloides em um espaço quadridimensional plano com assinatura lorentziana, suas coordenadas devem respeitar:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2 , \quad (5.23)$$

e a métrica é da forma:

$$ds^2 = d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (5.24)$$

Diante disso, temos três possibilidades de modelos de universo, mesmo usando tantas restrições, o paradigma da relatividade admite duas outras possibilidades de geometria além de uma estrutura plana. A possibilidade de universo descrito pela geometria espacial de uma esfera tridimensional nos dá um universo que, embora seja finito, não possui fronteira ou contorno (WALD, 1984). Tal universo é chamado de universo fechado, enquanto os outros dois tipos são ditos universos abertos. Considerando que nosso espaço-tempo seja tal como  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , onde  $\mathbb{R}$  representa a direção temporal e  $\Sigma$  é o espaço maximamente simétrico tridimensional, a métrica toma a forma de (CARROLL, 2019):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2 , \quad (5.25)$$

onde  $d\sigma$  é a métrica em  $\Sigma$ . O conjunto dessas possibilidades nos dá a forma geral da métrica do espaço-tempo (WALD, 1984):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) & K > 0 \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 & K = 0 \\ d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) & K < 0 \end{cases} . \quad (5.26)$$

A (5.26) em sua forma geral é chamada de *métrica de Robertson-Walker* e dá origem ao modelo cosmológico de Robertson-Walker, e o parâmetro  $a(t)$  vai nos dizer a respeito da evolução dinâmica do universo (WALD, 1984).

Desde o século XV, com Copérnico, já se assumia que não ocupávamos um lugar privilegiado no Universo e que as características mais simples do nosso entorno, numa certa escala, pareciam as mesmas, em outras palavras, o Universo parece ser homogêneo. Usando o linguajar matemático, podemos dizer que a homogeneidade é a afirmação de que a métrica é a mesma em todo o espaço (CARROLL, 2019). Embora isto ainda seja um debate em aberto, se o Universo é ou não homogêneo, observações e simulações recentes corroboram para o fato de que, numa certa escala, o universo é estatisticamente homogêneo (YADAV et al., 2010).

De modo similar, assume-se, naturalmente, que o Universo também é isotrópico, *i.e.* não existem direções privilegiadas no universo, as observações feitas, em grande escala, devem ser as mesmas independente de qual direção se olha (WALD, 1984). Se por um lado, a homogeneidade pode ser questionada, a isotropia do universo é confirmado por estudos recentes com um alto grau de confiança (SAADEH et al., 2016). Essas duas características podem ser condensados no *princípio cosmológico* que diz, basicamente, que em grande escala o Universo é homogêneo e isotrópico. Desse modo, ao construirmos um modelo que descreva nosso universo, iremos utilizar um espaço maximamente simétrico.

## 5.2 Dinâmica do Universo Homogêneo e Isotrópico

Para obtermos a evolução dinâmica do espaço vamos introduzir a métrica na equação de campo de Einstein. O primeiro ponto a definir é o tensor momento-energia do universo,  $T_{\mu\nu}$ , supondo, em uma primeira aproximação, que a maior parte da massa e energia do universo provenha de matéria comum, podemos tratar, em escala cósmica, dada a vastidão do universo, que as galáxias observadas são como “grãos de poeira”. Em geral, a velocidade das galáxias são relativamente pequenas, de modo que a “pressão” desta poeira de galáxias é desprezível (WALD, 1984). Com isso e supondo o universo isotrópico, uma boa aproximação para o tensor momento-energia é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu , \quad (5.27)$$

conforme vimos na subseção 4.2.1. Onde  $\rho$  é a densidade média da matéria no universo. Entretanto, há outras formas de massa e energia presentes no universo. Sabe-se que existe uma distribuição de radiação eletromagnética, cujo espectro equivale ao de um corpo negro, de cerca de  $2,725 K$  que preenche todo o Universo de forma isotrópica (FIXSEN et al., 1996). Essa radiação, que será mencionada mais a frente, é conhecida como *radiação cósmica de fundo*, foi prevista teoricamente em 1948 por Gamov e descoberta posteriormente em 1965 por Penzias e Wilson. No Universo atual, a contribuição dessa radiação para  $T_{\mu\nu}$  é quase nula, porém veremos mais a frente que no Universo primordial, a radiação tinha um papel predominante no tensor momento-energia.

Com isso, vamos optar por usar tensor momento-energia de um fluido perfeito. Esta é a forma mais geral que  $T_{\mu\nu}$  pode assumir, de modo a ser homogêneo e isotrópico. Neste caso, a pressão não será desprezível e na verdade teremos  $p = \rho$  (WALD, 1984):

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (5.28)$$

O próximo passo é calcular  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  a partir da métrica de Robertson-Walker e igualar ao tensor em (5.28) (WALD, 1984). A princípio, teríamos 10 equações correspondendo às 10 componentes independentes dos tensores de dois índices, mas graças às simetrias que o espaço tempo apresenta, sobram apenas duas equações independentes. As equações são (WALD, 1984):

$$R_{tt} + \frac{1}{2}g_{tt}R = 8\pi G\rho \quad (5.29)$$

$$R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R = 8\pi Gp, \quad (5.30)$$

assim, somos capazes de calcular o lado esquerdo de (5.29) e (5.30) em função de  $a(t)$ . Faremos isso para o espaço plano, *i.e.*:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.31)$$

Definindo  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ , temos que as componentes não nulas da conexão afim são, usando a (3.23) (WALD, 1984):

$$\Gamma_{xx}^t = \Gamma_{yy}^t = \Gamma_{zz}^t = a\dot{a} \quad (5.32)$$

$$\Gamma_{xt}^x = \Gamma_{tx}^x = \Gamma_{yt}^y = \Gamma_{ty}^y = \Gamma_{zt}^z = \Gamma_{tz}^z = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.33)$$

e agora, usando a (4.15) e (4.28), podemos achar as componentes do tensor de Ricci, que são (WALD, 1984):

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a} \quad (5.34)$$

$$R_{ii} = a^{-2}R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}, \quad (5.35)$$

como:

$$R = -R_{tt} + 3R_{ii} = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad (5.36)$$

temos que as (5.29) e (5.30) ficam:

$$R_{tt} + \frac{1}{2}R = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (5.37)$$

$$R_{tt} - \frac{1}{2}R = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi Gp, \quad (5.38)$$

combinando as duas podemos escrever:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p). \quad (5.39)$$

Se fizermos os mesmos cálculos para os casos de curvatura  $K > 1$  e  $K < 1$  teremos, respectivamente, a evolução geral das equações para um universo homogêneo e isotrópico (WALD, 1984):

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho - \frac{3K}{a^2} \quad (5.40)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p). \quad (5.41)$$

A primeira conclusão que salta aos olhos é o fato de que a solução não admite um universo estático, dado que  $\rho > 0$  e  $p \geq 0$  (WALD, 1984). De (5.41) ( $\ddot{a} < 0$ ) podemos ver que necessariamente o universo sempre esteve se expandindo ( $\dot{a} > 0$ ) ou se contraindo ( $\dot{a} < 0$ ), a exceção de um possível momento de inversão desse movimento (WALD, 1984). A natureza dessa expansão ou contração num universo isotrópico requer que a escala de distância entre os todos os observadores isotrópicos mude com o tempo, *i.e.* não existe um centro da expansão ou contração (WALD, 1984). Podemos ver que se a distância entre dois observadores num tempo  $t$  é  $R$ , a mudança desse distância é dada por:

$$v \equiv \frac{dR}{dt} = \frac{R}{a} \frac{da}{dt} = HR, \quad (5.42)$$

onde  $H(t) = \dot{a}/a$  é o *parâmetro de Hubble* e o valor atual  $H_0$  é a *constante de Hubble*. A equação (5.42) é conhecida como *lei de Hubble-Lemaître*, voltaremos a falar nesse assunto mais a frente. Podemos perceber que dado  $R$  grande o suficiente podemos ter  $v$  maior do que  $c$ , porém isso não implica na violação de nenhum princípio da relatividade, uma vez que nada está se deslocando a velocidade maior que  $c$  (WALD, 1984). A confirmação da lei de Hubble-Lemaître e da expansão do universo, uma previsão da relatividade geral, mostrou-se como um grande sucesso da teoria. Entretanto, o próprio Einstein na tentativa de evitar um modelo de universo dinâmico, propôs uma modificação na teoria adicionando um termo extra:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5.43)$$

em que  $\Lambda$  seria uma nova constante da natureza chamada de *constante cosmológica*. Com esse parâmetro extra, Einstein foi capaz de mostrar um solução de universo estático (WALD, 1984). Porém com a confirmação da expansão do universo por Hubble, a constante cosmológica foi abandonada, momentaneamente, visto que seu propósito inicial não era mais necessário. Contudo, até hoje  $\Lambda$  foi reintroduzida diversas vezes em várias teorias, quando surgem discrepâncias entre observações e teorias (WALD, 1984) e é mais conhecida por ser a explicação mais simples para a expansão acelerada, atual, do Universo. Vamos, por enquanto, assumir que  $\Lambda = 0$  sem perda de generalidade.

Se o Universo sempre esteve em expansão, com a mesma taxa de expansão atual, temos que no tempo  $T_0 = \frac{a}{\dot{a}} = H^{-1}$  seu raio deveria ser  $a = 0$ . Ou seja, a distância entre todos os pontos do espaço era zero, e a densidade de matéria e curvatura do espaço eram infinitas (WALD, 1984). Esse estado de singularidade do Universo é conhecido como *big bang*. Vale frisar que a natureza dessa singularidade decorre de um universo homogêneo sendo contraído até um “tamanho zero”. O big bang não é uma “explosão” ou surgimento de toda a matéria que observamos hoje a partir de um ponto de singularidade pré-existente. O cenário proposto é que o universo passou por uma fase dominada por radiação e depois teve uma transição para uma fase dominada por matéria.

Multiplicando a (5.40) por  $a^2$  e derivando em relação  $t$  e eliminando  $\ddot{a}$  usando a (5.41) obtemos:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (5.44)$$

supondo  $p$  constante, teremos que para um universo de poeira ( $p = 0$ ) (CARROLL, 2019):

$$\rho \propto a^{-3}, \quad (5.45)$$

ou seja, conforme o universo expande a sua densidade de matéria decresce por um fator  $a^{-3}$ . Para o caso da radiação ( $p = \rho/3$ ) temos (WALD, 1984):

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (5.46)$$

Neste caso, a densidade de energia decresce mais rapidamente. Olhando essas duas últimas equações, podemos assumir que no universo atual a densidade advinda da radiação é negligenciável, o que é corroborado pelas constatações observacionais, entretanto, no passado ( $a \rightarrow 0$ ) a radiação dominava ante a matéria (WALD, 1984).

Caso tivermos  $K = 0$  ou negativo,  $K = -1$  por exemplo, a (5.40) mostra que o  $\dot{a}$  nunca pode ser zero, ou seja, se o universo atual está em expansão, este irá manter essa expansão indefinidamente. De fato, para qualquer tipo de universo dominado por matéria com  $p \geq 0$ ,  $\rho$  deve decrescer ao menos tão rápido quanto  $a^{-3}$  (WALD, 1984). Com isso,



temos que:

$$K = 0 \quad \Rightarrow \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{a} \rightarrow 0 \quad (5.47)$$

$$K = -1 \quad \Rightarrow \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{a} \rightarrow 1. \quad (5.48)$$

Por outro lado, um universo com  $K = 1$  não pode expandir para sempre (WALD, 1984). No lado direito da equação (5.40), o primeiro termo decresce mais rapidamente que o segundo termo. Como o lado esquerdo é sempre positivo, existe um valor crítico  $a_c$  em que  $a$  sempre é menor. Portanto, para  $K$  positivo, existe um tempo finito após o big bang em que o universo atinge um tamanho máximo  $a_c$ , pára de expandir e então começa a se contrair (WALD, 1984). Pelo mesmo argumento do big bang, temos que após um tempo finito o universo de curvatura positiva irá possuir “tamanho zero”, no que é conhecido como *big crunch* (WALD, 1984). Assim, as equações dinâmicas advindas da relatividade geral, mostram que um universo com geometria esférica possui um tempo de existência finito.

As (5.40) e (5.41) podem ser facilmente resolvidas se eliminarmos  $\rho$  usando (5.45) e (5.46) respectivamente e substituindo de volta nas equações. Para poeira, obtém-se (WALD, 1984):

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + K = 0, \quad (5.49)$$

onde  $C = 8\pi G a^3/3$ . Para a radiação temos (WALD, 1984):

$$\dot{a}^2 - \frac{C'}{a} + K = 0, \quad (5.50)$$

onde aqui  $C' = 8\pi G a^4/3$ . Tais equações diferenciais são passíveis de serem resolvidas e as solução nos são conhecidas como *soluções de Friedmann*, pois foram obtidas primeiramente por Friedmann em 1922<sup>14</sup> (WALD, 1984):

Geometria espacial	“Poeira”	Radiação
$K = 1$	$a = \frac{1}{2}C(1 - \cos \eta)$ $t = \frac{1}{2}C(\eta - \sin \eta)$	$a = \sqrt{C'} \left[ 1 - (1 - t/\sqrt{C'})^2 \right]^{1/2}$
$K = 0$	$a = (9C/4)^{1/3} t^{2/3}$	$a = (4C')^{1/4} t^{1/2}$
$K = -1$	$a = \frac{1}{2}C(\cosh \eta - 1)$ $a = \frac{1}{2}C(\sinh \eta - \eta)$	$a = \sqrt{C'} \left[ (1 + t/\sqrt{C'})^2 - 1 \right]^{1/2}$

<sup>14</sup> Existem outros conceitos e modelos de universo obtidos a partir de outras abordagens, nesta monografia iremos estudar apenas os modelos baseados nas equações de Friedmann

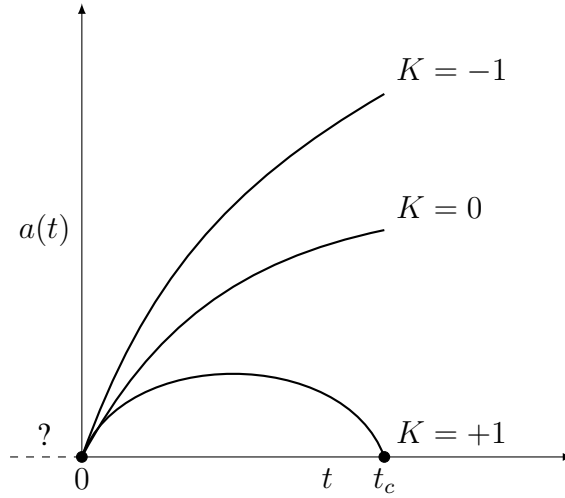


Figura 4 – Dinâmica de universo de Robertson-Walker preenchidos de matéria e/ou radiação

Com isso, independente do modelo adotado ( $K = \pm 1, 0$ ), o fator de escala vai a zero num tempo  $t = 0$  e a densidade de matéria tende a infinito. Também é possível mostrar que, nesse momento, o tensor de curvatura  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  tende a infinito da mesma forma (LINDE, 2005). Podemos usar as eqs. (5.49) e (5.50) para tirarmos conclusões significativas sobre uma expansão do universo. Em primeiro, para qualquer valor do parâmetro de Hubble, pode-se definir uma densidade crítica para,  $K = 0$ , tal que (WEINBERG, 2008):

$$\rho_{0,crit} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,878 \times 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3, \quad (5.51)$$

onde  $h$  é a constante de Hubble em unidades de  $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Quaisquer que sejam os constituintes do universo, a curvatura constante  $K$  será 1, 0 ou  $-1$ , conforme a densidade atual  $\rho_0$  seja maior, igual ou menor que  $\rho_{0,crit}$  (WEINBERG, 2008). Se o termo  $3p + \rho$  for positivo (5.41) nos mostra que  $\frac{\ddot{a}}{a} \leq 0$ , portanto a expansão se iniciou com  $a = 0$ , em algum momento.

No caso do universo com  $K = 1$ , podemos calcular um parâmetro de desaceleração  $q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}$  dado por<sup>15</sup>:

$$q_0 = \frac{4\pi G(\rho_0 + 3p_0)}{3H_0^2} = \frac{\rho_0 + 3p_0}{2\rho_{0,crit}}. \quad (5.52)$$

Se a atual densidade do Universo fosse majoritariamente composta por poeira, então teríamos  $p_0 \ll \rho_0$  e a curvatura constante  $K$  seria definida por  $q_0$  conforme seu valor fosse  $q_0 < 1/2$ ,  $q_0 = 1/2$  ou  $q_0 > 1/2$  (WEINBERG, 2008). Por outro lado, no caso do Universo dominado por radiação,  $p_0 = \rho_0/3$  o valor crítico de  $q_0$  seria 1.

Um ponto importante é a respeito da contribuição dos tipos diferentes de matéria para o termo  $\rho a^2$  em (5.49) e (5.50), para poeira, este cresce com  $a^{-1}$  e para radiação com

<sup>15</sup> O índice subscripto 0 denota os valores no presente

$a^{-2}$ , ou seja, para  $a \rightarrow 0$ , *i.e.* no Universo primordial, a expansão do universo se deu de forma a ignorar a constante  $K$ , de modo que ficamos com:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \rightarrow \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad (5.53)$$

isso significa que no Universo primordial a densidade era tão próxima quanto igual a densidade crítica  $\frac{3H^2}{8\pi G}$ .

Podemos fazer que a densidade do Universo, com  $K$  arbitrário,  $\rho$  é composta por contribuições de  $\rho_M$ ,  $\rho_R$  e  $\rho_\Lambda$  que é a densidade de energia do vácuo<sup>16</sup>, isto é, o Universo é uma mistura de radiação, matéria e vácuo (WEINBERG, 2008):

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[ \Omega_\Lambda + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right], \quad (5.54)$$

onde define-se um parâmetro  $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{0,crit}} = \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}$  e as densidades valem:

$$\rho_{\Lambda_0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_\Lambda}{8\pi G}, \quad \rho_{M_0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_M}{8\pi G}, \quad \rho_{R_0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_R}{8\pi G}, \quad (5.55)$$

com isso, temos:

$$\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_R + \Omega_K = 1, \quad \Omega_K \equiv -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}, \quad (5.56)$$

que após alguma manipulação algébrica resulta em:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{M_0} a^{-3} + \Omega_{R_0} a^{-4} + \Omega_{K_0} a^{-3}. \quad (5.57)$$

Com isso, podemos usar as medidas dos parâmetros de densidade para se determinar a geometria do nosso universo. Os dados recentes indicam um universo aproximadamente plano ( $K = 0$  e  $\Omega = 1$ ) (ADE et al., 2014):

$$\Omega_M \approx 0,314 \pm 0,020, \quad \Omega_R \approx 9,23640 \times 10^{-5}, \quad \Omega_\Lambda \approx 0,686 \pm 0,020, \quad (5.58)$$

resultando em:

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda = 1,00 \pm 0,020. \quad (5.59)$$

### 5.3 Redshift cosmológico

A maior parte das evidências experimentais de que o Universo está de fato se expandindo vêm da observação da mudança das frequências das linhas espectrais

<sup>16</sup> Não mencionamos a densidade de energia antes por motivos de simplicidade na explicação, porém levaremos em conta esse fator no cálculo da densidade.

de galáxias distantes em comparação com os valores medidos em laboratórios na terra (WEINBERG, 2008). Vamos supor que um raio luminoso se aproxima do observador ao longo da direção radial, como temos que  $ds^2 = 0$  para um raio luz, ficamos com (WEINBERG, 2008):

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (5.60)$$

Aqui expressamos a métrica como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (5.61)$$

que é igual a (5.26). Sabendo que, para um raio de luz vindo de uma galáxia distante,  $r$  decresce conforme  $t$  aumenta, portanto devemos adotar o sinal negativo em (5.60). Se a luz sai de sua fonte em  $r_1$  num tempo  $t_1$  e chega no observador localizado na origem  $r = 0$  num tempo posterior  $t_0$ , temos:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (5.62)$$

Tomando a derivada dessa relação, podemos concluir que o intervalo de tempo  $\Delta t_1$  entre a partida de sinais de luz subsequentes está relacionado ao intervalo de tempo  $\Delta t_0$  entre a chegada desses sinais conforme:

$$\frac{\Delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)}. \quad (5.63)$$

Interpretando os sinais como cristas de ondas, a frequência emitida vale  $\nu_1 = \frac{1}{\Delta t_1}$  e a frequência observada  $\nu_0 = \frac{1}{\Delta t_0}$ , logo:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (5.64)$$

Caso o termo  $a(t)$  esteja aumentando, teremos um redshift, ou seja, uma diminuição na frequência por um fator de  $a(t_1)/a(t_0)$ , ao mesmo passo que temos um aumento no comprimento de onda por um fator de  $a(t_0)/a(t_1)$ , convencionalmente chamado de  $1 + z$  (WEINBERG, 2008):

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (5.65)$$

Por outro lado, caso o valor de  $a(t)$  esteja diminuindo, teremos um blueshift, uma diminuição no comprimento de onda por um fator dado em (5.65) e com  $z$  negativo. Pelo fato de que a distância própria até um ponto aumenta ou diminui conforme  $a(t)$  varia, esses resultados são interpretados como um tipo de efeito Doppler. Porém vale ressaltar que,

diferentemente do efeito Doppler convencional, a mudança no comprimento de onda da luz emitidas por galáxias distantes não tem a ver com a variação de  $a(t)$  no momento em que a luz foi emitida, mas sim na variação de  $a(t)$  durante o período de emissão até a absorção da luz (WEINBERG, 2008).

A primeira observação de redshift em galáxias se deu no início dos anos 1910s, por Vesto Slipher (EDDINGTON, 1924). Nos anos posteriores descobriu-se uma série de nebulosas espirais com redshifts que pareciam aumentar com distância. Mas até 1923 só era possível inferir as distâncias relativas das nebulosas espirais, usando observações de sua luminosidade aparente ou diâmetro angular. Como a luminosidade absoluta e as dimensões físicas eram desconhecidas, imaginavam que as nebulosas espirais fossem partes periféricas de nossa própria galáxia. Isso muda com Edwin Hubble e a descoberta das estrelas variáveis *Cefeidas* na nebulosa M31 de Andrômeda, as quais permitiu-lhe estimar sua distância e tamanho, deixando claro que as nebulosas espirais eram galáxias como a nossa, e não objetos em nossa própria (WEINBERG, 2008).

Em 1929, Hubble anunciou que havia encontrado uma relação quase linear entre redshift e distância até as galáxias (HUBBLE, 1929). Entretanto, naquela época os desvios para o vermelho e as distâncias foram medidos apenas para galáxias até o grande aglomerado de galáxias na constelação de Virgem, cujo redshift indica uma velocidade radial de cerca de  $1.000 \text{ km/s}$ , não muito maior do que as velocidades típicas. Os dados ficaram, portanto, amplamente espalhados em um gráfico e não demonstravam uma relação linear. Mas no início dos anos 1930s ele mediu redshifts e distâncias até o aglomerado Coma, com redshift  $z = 0,02$ , correspondendo a uma velocidade de recessão de aproximadamente  $7.000 \text{ km/s}$ , deixando evidente uma relação linear entre redshift e distância. A conclusão era clara: o universo realmente está se expandindo. Hubble percebeu que não apenas as galáxias possuíam um desvio para o vermelho, mas que quanto maior fosse sua distância, maior seria esse desvio para o vermelho. Com esse fato, ele deduziu uma relação linear que ficou conhecida como lei de Hubble-Lemaître, conforme a equação (5.42)

## 5.4 Horizontes

No estudo da cosmologia, iremos encontrar dois tipos distintos de horizontes que limitam uma distância máxima no qual os eventos passados podem ser observados ou eventos futuros que podem ser observados, tais horizontes são chamados de *horizonte de partícula* e *horizonte de eventos*, respectivamente (WEINBERG, 2008).

De acordo com a (5.62), se o *big bang* começou num tempo  $t = 0$ , então o maior valor possível para  $r$  em que um observador no tempo  $t$  poderá receber sinais viajando a

velocidade da luz é dado por:

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (5.66)$$

Isso mostra que existe um horizonte de partícula desde que a integral  $\int dt'/a(t)$  convirja em  $t = 0$ . Como nos estágios iniciais do universo, a radiação predominava sobre a matéria, isto é  $a(t) \propto t^{1/2}$ , a integral converge. A distância própria desse horizonte é dado por:

$$d_{max}(t) = a(t) = \int_0^{r_{max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (5.67)$$

sendo essa a distância máxima em que podemos observar no passado.

Assim como existe um limite para o que podemos observar no passado, existe um limite para eventos futuros que podemos observar. Usando novamente a (5.62), se o universo vier a recolapsar num tempo futuro  $T$ , então o maior valor possível  $r_{MAX}$  para  $r$  em que um observador poderá receber sinais viajando na velocidade da luz emitidos num tempo futuro  $t$  é ditado por (WEINBERG, 2008):

$$\int_t^T \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{MAX}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (5.68)$$

Mesmo que o tempo futuro seja no infinito, a integral ainda pode convergir e o horizonte será dado por:

$$\int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{MAX}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (5.69)$$

cuja distância própria é dada por:

$$d_{MAX}(t) = a(t) = \int_0^{r_{MAX}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}. \quad (5.70)$$

No universo dominado por matéria e sem constante cosmológica,  $a(t)$  cresce com  $t^{2/3}$  e a integral diverge, portanto não há o horizonte. No caso de haver a constante cosmológica,  $a(t)$  cresce com  $e^{Ht}$  e existe o horizonte cujo valor se aproxima de  $d_{MAX}(\infty) = 1/H$  (WEINBERG, 2008). Isso indica que todas as fontes de luz fora do nosso alcance gravitacional, isto é não ligadas gravitacionalmente a nós, irão se afastar para além dessa distância conforme o universo expande e se tornarão inobserváveis.

## 5.5 Radiação Cósmica de Fundo

Até meados da década de 60 quase toda informação sobre a evolução e estrutura do universo vinha das observações dos redshifts em galáxias distantes. Foi somente em 1965 com a detecção da *radiação cósmica de fundo em micro-ondas* (do inglês *Cosmic*

*Microwave Background*, ou CMB). Está é uma radiação eletromagnética quase isotrópica que preenche todo o Universo e cujo espectro é o de um corpo negro a  $2,7\text{ K}$ . A radiação foi primeiro prevista da década de 40 por George Gamow que supôs que o Universo deveria ser preenchido pela radiação de um corpo negro (GAMOW, 1948). Posteriormente, Penzias e Wilson detectaram uma interferência numa antena de um rádio telescópio (PENZIAs; WILSON, 1965), que posteriormente, junto a Roll e Wilkinson determinaram ser a CMB (ROLL; WILKINSON, 1966). Segundo a teoria, o universo primordial era preenchido com um gás relativístico de fótons, elétrons, pósitrons, quarks, antiquarks etc. (acredita-se que havia um pequeno excesso de bárions em relação aos antibárions, 1 a cada  $10^9$ ). A CMB é resultado do resfriamento desse gás de fótons durante a expansão do universo (LINDE, 2005).

Com efeito, se supusermos o Universo como um fluido perfeito, o trabalho realizado pela pressão na expansão de tal fluido usa a energia térmica do próprio fluido, ou seja, conforme se expande, ao mesmo tempo, se esfria. Como temos um Universo em expansão, é de se esperar que no passado a matéria presente fosse mais quente e mais densa que atualmente. Se formos no passado o suficiente, chegaria uma época em que se era quente o bastante para que os elétrons não se ligassem formando átomos (WEINBERG, 2008). Em tais tempos, as rápidas colisões entre fótons e elétrons livres manteriam a radiação em equilíbrio térmico com a densa e quente matéria do universo. Podemos calcular o número de densidade dos fótons em equilíbrio com a matéria, numa dada temperatura  $T$  e com os fótons numa banda de frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , pois este é o espectro de radiação de um corpo negro (WEINBERG, 2008):

$$n_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/K_B T} - 1}, \quad (5.71)$$

onde  $h$  é a constante de Planck e  $K_B$  é a constante de Boltzmann.

Passado um tempo, a matéria se tornaria mais fria e menos densa, de modo que, eventualmente, a radiação deixaria de estar em equilíbrio térmico com a matéria e passaria a estar em expansão livre após sofrer um último espalhamento, que é exatamente a CMB (WEINBERG, 2008). Diante disso, um fóton com uma frequência  $\nu$  após viajar um livremente por um tempo  $t$  teria sua frequência igual a<sup>17</sup>  $\frac{\nu a(t)}{a(t_e)}$  no momento em que a radiação deixou de estar em equilíbrio com a matéria. Portanto, o número de densidade de fótons com frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  no tempo  $t$  será (WEINBERG, 2008):

$$n(\nu, t) = \left(\frac{a(t_e)}{a(t)}\right)^3 n_{T(t_e)} \left(\frac{a(t)}{a(t_e)}\right) d\left(\frac{a(t)}{a(t_e)}\right), \quad (5.72)$$

onde o fator  $(a(t_e)/a(t))^3$  vem da diluição dos fótons devido à expansão cósmica. Usando as (5.71) e (5.72), os fatores  $\left(\frac{a(t_e)}{a(t)}\right)$  se cancelam exceto na parte exponencial, portanto o

<sup>17</sup> Aqui  $t_e$  indica o tempo em que ocorreu o último espalhamento do fóton

número de densidade no tempo  $t$  fica (WEINBERG, 2008):

$$n(\nu, t) = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T(t)} - 1} = n_{T(t)}(\nu) d\nu, \quad (5.73)$$

onde:

$$T(t) = \frac{T(t_e)a(t_e)}{a(t)}. \quad (5.74)$$

Com isso, a densidade do fóton é a mesma dado por um corpo negro, mesmo após este ter saído do equilíbrio com a matéria, com a temperatura deslocado por (5.74). Esta conclusão é mantida válida se a transição da opacidade (fótons sofrendo espalhamento) para a transparência (fótons se movendo livres) ocorreu num intervalo de tempo finito, enquanto o as interações dos fótons com a matéria durante este intervalo são limitadas a processos de espalhamento elástico nos quais as frequências dos fótons não são alteradas (WEINBERG, 2008).

A densidade de energia dessa radiação é dada por (WEINBERG, 2008):

$$\int_0^\infty h\nu n(\nu) d\nu = a_B T^4, \quad (5.75)$$

onde  $a_B$  é a constante de energia de radiação, dada por:

$$a_B = \frac{8\pi^5 K_B^4}{15h^3}. \quad (5.76)$$

Usando o valor medido de  $T = 2,725 K$ , temos uma densidade de massa igual a (WEINBERG, 2008):

$$\rho_{\gamma_0} = a_B T_{\gamma_0}^4 = 4,64 \times 10^{-34} g cm^{-3}, \quad (5.77)$$

calculando o parâmetro de densidade:

$$\Omega_\gamma \equiv \frac{\rho_{\gamma_0}}{\rho_{0,crit}} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}. \quad (5.78)$$

Sabendo que os fótons se juntam aos neutrinos e antineutrinos, na classe das partículas não-massivas ou quase não-massivas, na contabilização da densidade de energia total da radiação, ficamos com (WEINBERG, 2008):

$$\rho_{R_0} = \left[ 1 + 3 \left( \frac{7}{8} \right) \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \right] \rho_{\gamma_0} = 7,80 \times 10^{-34} g cm^{-3}, \quad (5.79)$$

usando a (5.51), obtemos:

$$\Omega_R \equiv \frac{\rho_{R_0}}{\rho_{0,crit}} = 4,15 \times 10^{-5} h^{-2}. \quad (5.80)$$

Nota-se que  $\rho_{R_0}$  é muito menor do que a densidade de massa crítica necessária para termos  $K = 0$ , e muito menor também que a densidade de massa da matéria ordinária vista em estrelas.



## 6 Inflação

Neste capítulo faremos a discussão a respeito dos problemas do modelo cosmológico mostrado até agora e mostrar uma possível solução para estes, a suposição de que em um período de sua evolução o universo passou por uma fase de expansão exponencial, *i.e.* o fator  $a(t)$  crescia exponencialmente (WEINBERG, 2008). Porém, antes de entrarmos de fato na Inflação, vamos fazer uma breve enunciado sobre campos escalares e quebra espontânea de simetria.

### 6.1 O Campo Escalar e a Quebra Espontânea de Simetria

Nas teorias de unificação das interações fraca, forte e eletromagnética, campos escalares  $\varphi$  desempenham papéis fundamentais. Vamos considerar a lagrangiana de um campo escalar simples com uma componente<sup>18</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^4, \quad (6.1)$$

em que o termo  $m$  é a massa do campo escalar e  $\lambda$  é a sua constante de acoplamento, que iremos assumir  $\lambda \ll 1$  por motivos de simplicidade. Se  $\varphi$  for pequeno o suficiente, podemos ignorar o último termo em (6.1) e o campo  $\varphi$  satisfaz a equação de Klein-Gordon (PESKIN, 2018):

$$(\square + m^2)\varphi = \ddot{\varphi} - \nabla^2\varphi + m^2\varphi = 0. \quad (6.2)$$

A solução geral para (6.2) é uma superposição de ondas planas que correspondem a propagação de partículas de massa  $m$  e momento  $k$ <sup>19</sup>:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [e^{ikx} a^+(\mathbf{k}) + e^{-ikx} a^-(\mathbf{k})], \quad (6.3)$$

onde  $a^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\varphi^\pm(k)$ ,  $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ,  $kx = k_0t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ . Conforme (6.3), o campo  $\varphi(x)$  irá oscilar em torno do ponto  $\varphi = 0$ , do potencial efetivo (LINDE, 2005):

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4. \quad (6.4)$$

<sup>18</sup> Usaremos  $\hbar = c = 1$ , conforme se usa em física de partículas elementares.

<sup>19</sup> Ver Apêndice B

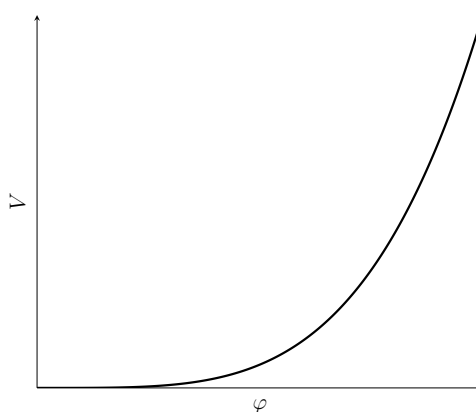


Figura 5 – Potencial efetivo  $V(\varphi)$  de (6.1)

Avanços nas teorias de unificação das interações fraca, forte e eletromagnética foram obtidos ao se usarem teorias baseadas em lagrangianas do tipo (6.1), e com  $m^2 > 0$  levando à estranha possibilidade da aparição de massas ao quadrado menores que zero nas teorias (LINDE, 2005):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4. \quad (6.5)$$

Agora, a solução correspondente a (6.3) não oscila mais em torno de  $\varphi = 0$ , este cresce exponencialmente próximo a  $\varphi = 0$  quando  $\mathbf{k}^2 < m^2$  (LINDE, 2005):

$$\delta\varphi(\mathbf{k}) \approx e^{\pm\sqrt{\mu^2 - \mathbf{k}^2}t} \cdot e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (6.6)$$

isso mostra que o mínimo do potencial efetivo, dado por:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (6.7)$$

Passa a ocorrer em  $\varphi_0 = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$  (LINDE, 2005). Portanto, mesmo que o campo  $\varphi$  seja inicialmente zero, este sofre uma transição (após um tempo da ordem de  $\mu^{-1}$ ) para um estado estável em  $\varphi_0 = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ , este fenômeno é chamado de *quebra espontânea de simetria*.

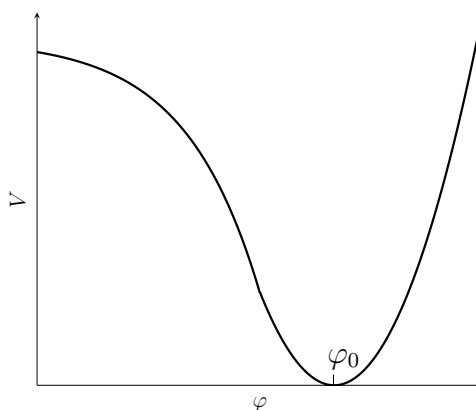


Figura 6 – Potencial efetivo  $V(\varphi)$  de (6.5)

Após a quebra espontânea de simetria, qualquer excitação no campo  $\varphi$  em torno de  $\varphi_0$  pode ser descrita pela solução dada em (6.3) (LINDE, 2005). Para isso, basta fazer uma mudança de variáveis:

$$\varphi \rightarrow \varphi + \varphi_0, \quad (6.8)$$

de modo que a lagrangiana em (6.5) fique:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi + \varphi_0) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(\varphi + \varphi_0))^2 + \frac{\mu^2}{2}(\varphi + \varphi_0)^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi + \varphi_0)^4 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{3\lambda\varphi^2 - \mu^2}{2}\varphi^2 - \lambda\varphi_0\varphi^3 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2}\varphi_0^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi_0^4 - \varphi(\lambda_0^2 - \mu^2)\varphi_0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

A (6.9) mostra que quando temos  $\varphi_0 \neq 0$ , a massa efetiva ao quadrado do campo  $\varphi$  não é igual a  $\mu^2$ , mas sim igual a:

$$m^2 = 3\lambda\varphi_0^2 - \mu^2, \quad (6.10)$$

e quando  $\varphi = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ , no mínimo do potencial (6.7), temos:

$$m^2 = 2\lambda\varphi_0^2 = 2\mu^2 > 0, \quad (6.11)$$

isto é, a massa ao quadrado do campo  $\varphi$  tem o sinal correto. Agora, voltando a equação para as variáveis originais, a solução para  $\varphi$  é dada por (LINDE, 2005):

$$\varphi(x) = \varphi_0 + (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [e^{ikx} a^+(\mathbf{k}) + e^{-ikx} a^-(\mathbf{k})]. \quad (6.12)$$

A integral em (6.12) corresponde a partículas do campo  $\varphi$ , com massa dada por (6.11), propagando-se através de um campo clássico constante  $\varphi_0$  (LINDE, 2005).

Vamos ver um exemplo do funcionamento dessa teoria. O mecanismo de Higgs descreve um campo vetorial  $A_\mu$  que interage com o campo escalar complexo  $\psi = \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}}$ , a lagrangiana é (HIGGS, 1964):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + \mu^2\psi^*\psi - \lambda(\psi^*\psi)^2, \quad (6.13)$$

quando  $\mu < 0$ , o campo escalar  $\psi$  passa a ter uma componente clássica. Novamente, para descrevermos isso, fazemos uma mudança de variáveis:

$$\psi(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(x) + \varphi_0)e^{i\zeta(x)/\varphi_0} \quad (6.14)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e\varphi_0}\partial_\mu\zeta(x), \quad (6.15)$$

com isso, a lagrangiana fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{e^2}{2}(\varphi + \varphi_0)^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 \\ & - \frac{3\lambda\varphi_0^2 - \mu^2}{2}\varphi^2 \lambda\varphi_0\varphi^3 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \frac{\mu^2}{2}\varphi_0 - \frac{\lambda}{4}\varphi_0^4 - \varphi(\lambda\varphi_0^2 - \mu^2)\varphi_0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Vemos que o campo auxiliar em (6.14) e (6.15) é cancelado em (6.16), que descreve a teoria das partículas (que se transformam como vetores) de massa  $m = e\varphi_0$  que interagem com um campo escalar tendo potencial efetivo dado por (6.7). Assim, quando  $\mu^2 > 0$  ocorre a quebra espontânea de simetria e o campo  $\varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$  surge, as partículas do campo  $A_\mu$  adquirem massa  $m_A = e\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ .

Esse processo de partículas adquirirem massa após a interação é chamado de *mecanismo de Higgs* e os campos  $\psi$  e  $\varphi$  são chamados de *campos de Higgs*. A presença do campo clássico  $\varphi_0$  quebra a simetria em (6.13). A ideia fundamental das teorias de unificação das interações é que, antes da quebra espontânea de simetria, todas as partículas que mediam essas interações (os mésons vetores) não possuem massa e não há diferenças entre as interações. Como resultado da quebra de simetria alguns dos mediadores vetoriais adquirem massa, e suas interações correspondentes tornam-se de curto alcance, quebrando assim a simetria entre as interações (HIGGS, 1964).

Nesta seção, preocupamo-nos em introduzir a ideia de quebra espontânea de simetria, junto da teoria de campo escalar, além de exemplificar sua utilidade e seu sucesso em outras áreas da física de modo a corroborar no porquê de se adotar esse conceito no estudo da inflação, pois a quebra espontânea de simetria desempenha um papel fundamental na teoria da inflação.

O modelo cosmológico, aqui apresentado, nos diz que o Universo, no passado, esteve em um estado extremo de alta temperatura e densidade, formado por um plasma de partículas elementares dissociadas. Acredita-se que nesse momento primordial, existia uma *simetria perfeita* entre as interações, podendo-se distinguir apenas a força gravitacional e uma força unificada (que seria composta das outras três interações conhecidas). Conforme o universo foi expandindo e se resfriando, este experimentou sucessivas transições de fases e quebras de simetrias indo em direção a simetrias menores. As teorias que tratam disso são chamadas de Teorias da Grande Unificação (GUT's, em inglês). As GUT's dizem que pouco tempo após o início do Universo, quando a temperatura estava na ordem de  $T \approx 10^{28} K$  e  $t \approx 10^{-36} s$  ocorreu a primeira quebra espontânea de simetria e a força unificada se "dividiu" entre força forte e força eletrofraca (SOUZA, 2004). Essa transição foi a que deu início ao processo de inflação cósmica.

Entretanto, a transição de fase que quebraria a simetria entre as forças não aconteceu instantaneamente com  $T \approx 10^{28} K$ , ao invés disso, supõe-se que o Universo passou

por uma fase de super-resfriamento (de modo análogo ao super-resfriamento da água, quando esta existe na fase líquida mesmo estando numa temperatura inferior a  $0^{\circ}\text{C}$ ) e formou um falso-vácuo<sup>20</sup>, isto é, um estado de energia mínima localmente, onde se é estável, porém não é o mais estável e nem o mínimo global de energia. Guth percebeu que esse falso-vácuo possuía o termo de pressão negativa que faria o Universo expandir aceleradamente, seguindo (5.44). Enquanto o Universo estivesse no falso mínimo, a inflação ocorria. Quando o processo de inflação terminou de acontecer a liberação de energia fez com que o Universo retornasse às temperaturas pré-inflacionárias num processo chamado de *reheating* (KOFMAN et al., 1994) e a partir daí evoluiu para as condições que hoje observamos, conforme previsto pelo modelo baseado nas equações de Friedmann. Para saber mais sobre a quebra espontânea de simetria no contexto da inflação o leitor pode ler (MOSS, 1985) e (KOFMAN et al., 1994).

## 6.2 Problemas da Cosmologia Padrão

A descoberta da CMB corroborou para a teoria do universo primordial quente e denso, conforme o modelo cosmológico apresentado no capítulo anterior previa. Entretanto existem alguns problemas e questões ainda a serem respondidas, que modelos cosmológicos com fase inflacionária visam resolver. Nesta seção enunciaremos alguns desses problemas.

### 6.2.1 Problema da Planicidade

Conforme o Universo foi se expandindo, este foi esfriando. Do momento em que a temperatura caiu desde, aproximadamente,  $10^4 K$  até o momento presente, o parâmetro  $a(t)$  aumentou de forma proporcional a  $t^{2/3}$  (WEINBERG, 2008). O parâmetro  $\Omega_K$  depende de  $\frac{|K|^2}{\dot{a}}$  e este termo também aumentou conforme  $t^{2/3}$  (devido ao Universo ser dominado por matéria). Como as medidas observacionais corroboram para um valor de  $|\Omega_K| < 1$ , devemos ter que na época em que a temperatura era da ordem de  $10^4 k$ , o fator  $\frac{|K|^2}{\dot{a}}$  era da ordem de  $10^{-4}$  (WEINBERG, 2008). Antes disso, o fator  $a(t)$  aumentava de acordo com  $t^{1/2}$  (devido ao Universo ser dominado por radiação), então  $\frac{|K|^2}{\dot{a}}$  aumentava conforme  $t$  (WEINBERG, 2008). De modo a termos esse fator não maior que  $10^{-4}$  no tempo em que a temperatura do universo era de  $10^4 K$ , seu valor deveria ser aproximadamente  $10^{-16}$  quando a temperatura era cerca de  $10^{10} K$ , e menor ainda em tempos mais antigos e de temperatura maior.

O fato do parâmetro de curvatura ter sido extremamente pequeno no passado, não é de fato um paradoxo, porém é algo que o modelo sem inflação não consegue explicar.

<sup>20</sup> Este falso-vácuo pode ser entendido como o menor estado de energia possível para a força unificada

Porém, o modelo inflacionário consegue abordar esse problema sem fazer suposições arbitrárias. Se antes da era dominada por radiação tivéssemos uma época de inflação então, necessariamente, o espaço deveria ser extremamente plano (do ponto de vista espacial), *i.e.* curvatura espacial nula (WEINBERG, 2008).

Supondo que o universo se iniciou com um período de inflação, no qual o fator de escala  $a(t)$  cresceu exponencialmente conforme  $e^{\mathcal{N}}$ , depois foi sucedido pelas já conhecidas eras dominadas pela radiação e depois pela matéria. Diante disso, se no início da inflação o termo  $\frac{|K|}{a^2 H^2}$  possuía um certo valor, no fim da inflação (em  $t = t_I$ ) teria um valor de  $\frac{|K|}{a_I^2 H_I^2}$  da ordem de  $e^{-2\mathcal{N}}$ , no tempo presente teríamos que:

$$|\Omega_K| = \frac{|K|}{a_0^2 H_0^2} = e^{-2\mathcal{N}} \left( \frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \right)^2, \quad (6.17)$$

de modo que o problema da planicidade não existiria desde que  $e^{\mathcal{N}} > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}$ . No ponto de vista mais qualitativo, a solução do problema da planicidade pela inflação se dá pelo fato da rápida e exponencial expansão. Em outras palavras e num ponto de vista mais gráfico, uma esfera inflando, aumenta de tamanho e mantém sua topologia inalterada, porém sua geometria se torna mais plana (LINDE, 2005) (ver figura 7).

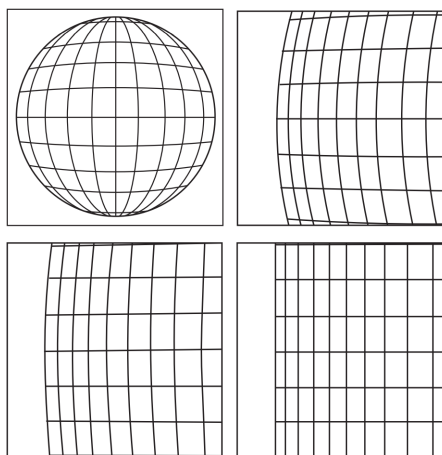


Figura 7 – Um objeto expandindo em grande escala terá a geometria de sua superfície aproximadamente euclidiana. Fonte: (LINDE, 2005)

Ou seja, a esfera terá que a geometria de sua superfície tende à geometria euclidiana, o que, intuitivamente, explica a planicidade, homogeneidade e isotropia observadas.

## 6.2.2 Problema do Horizonte

Quando observamos objetos astronômicos no céu noturno, estamos de fato olhando para o passado. Ao olharmos para uma galáxia a 1 bilhão de anos-luz de distância,

estamos vendo a mesma como era há 1 bilhão de anos, pois este foi o tempo que a luz demorou para sair da galáxia até chegar a nós. Podemos observar até uma certa distância, dada pelo *horizonte próprio*<sup>21</sup>, então por exemplo, se olharmos para 10 bilhões de anos-luz de distância num sentido e depois olharmos para os mesmos 10 bilhões de anos-luz no sentido oposto estaremos olhando para duas localidades distantes por 20 bilhões de anos-luz de distância. Ou seja, não houve tempo o suficiente, desde o início do universo, para a luz de uma chegar até a outra, *i.e.* estes dois pontos não estão ligados causalmente.

Entretanto, a CMB nos mostra que o Universo é praticamente isotrópico, mas como é possível que pontos sem nenhuma relação de causalidade possuam as mesmas características? A inflação pode explicar esse problema, pois na era da inflação, todo o Universo observável de hoje, ocupava um espaço minúsculo, causalmente ligado e em equilíbrio (WEINBERG, 2008).

Para entender melhor, vejamos o tamanho do horizonte próprio no momento do último espalhamento:

$$d_H(t_e) = \int_{t_i}^{t_e} \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.18)$$

onde  $t_i$  é o tempo em que se iniciou a inflação. Assumindo que a integral é dominada pela inflação, ou seja a parte da radiação e matéria não contribuem para o crescimento de  $a(t)$ , temos que:

$$a(t) = a(t_i)e^{H_I(t-t_i)} = a_I e^{-H(t_I-t)}, \quad (6.19)$$

em que  $t_I$  é o tempo em que a inflação teve fim e  $a_I = a(t_I)$ . Definindo o termo  $\mathcal{N} \equiv H_I(t_I - t_i)$ , a equação (6.18) fica:

$$d_H(t_e) = \frac{a(t_e)}{a_I H_I} (e^{\mathcal{N}} - 1). \quad (6.20)$$

Para que possamos resolver o problema do horizonte, o fator  $e^{\mathcal{N}}$  deve ser muito maior que 1, com isso podemos ignorar o termo  $-1$  em (6.20). Ainda, para que se tenha o alto grau de isotropia observado na CMB, devemos ter que  $d_H(t_e) > d_A(t_e)$ , onde  $d_A(t_e)$  é a distância do diâmetro angular da superfície do último espalhamento. Portanto (WEINBERG, 2008):

$$d_A(t_e) \approx \frac{a(t_e)}{a_0 H_0}, \quad (6.21)$$

assim, a condição  $d_H(t_e) > d_A(t_e)$  para a isotropia da CMB se resume a:

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}, \quad (6.22)$$

que é exatamente a mesma condição usada para resolver o problema da planicidade.

<sup>21</sup> O horizonte próprio diz qual é a máxima distância que da qual a luz pode ter viajado dada a idade do universo.

### 6.2.3 Problema do monopólo magnético

Um grande debate na física é sobre a não observação dos monopólos magnéticos, uma vez que isso provoca uma assimetria nas equações de Maxwell. Em outras palavras, somos capazes de observar cargas elétricas, porém nunca observamos uma carga magnética, apenas dipólos magnéticos. Se existissem monopólos magnéticos, o movimento das cargas magnéticas gerariam correntes magnéticas que induziriam campos elétricos, resultando numa perfeita simetria entre eletricidade e magnetismo. As GUT's preveem a existências dos monopólos magnéticos (HOOFT, 1974) e estabelecem que sua criação se daria no universo primordial (PRESKILL, 1979), de modo que, hoje, os monopólos deveriam ser tão abundantes quanto os fótons da CMB, uma vez que a carga magnética se conserva e eles seriam estáveis. Por que não houve uma observação se quer dos monopólos magnéticos se eles deveriam ser abundantes?

A solução vem novamente da inflação, se os monopólos seriam formados antes da inflação, conforme preveem as GUT's, estes experimentariam a expansão exponencial do universo provocada pela inflação. A explicação então é que os monopolos estariam extremamente diluídos no universo, pois a inflação ocorreu numa temperatura inferior à da temperatura de formação dos monopólos, ou seja, estes apenas foram “espalhados” pelo universo, resultando numa densidade extremamente baixa (KOLB; TURNER, 2018).

## 6.3 Inflação Slow-roll

Um dos primeiros trabalhos em inflação foi feito por Guth e a ideia inicial para a inflação era de que havia um campo escalar  $\varphi$ , chamado de *ínflaton*, o qual estava, inicialmente, num mínimo local (metaestável) de algum potencial e que após uma transição de fase, que se dava de forma retardada, passou para o mínimo verdadeiro (GUTH, 1981). O próprio Guth percebeu, posteriormente, que este mecanismo não podia ser bem sucedido, pois a transição de fase inicial do “falso vácuo” inicial para o “vácuo verdadeiro” de energia mais baixa não poderia ter acontecido, de modo simultâneo, em todos os lugares. Esta deve ter acontecido em locais distintos e espalhados, como se fossem pequenas bolhas de vácuo verdadeiro num mar de falso vácuo que se expandia rapidamente. O problema é que o calor latente liberado na fase transição teria terminado nas paredes da bolha, deixando o interior das bolhas essencialmente vazio. Assim, os únicos lugares onde existiria energia que poderia ser usada para formar o atual conteúdo do universo seria altamente não homogênea e anisotrópica (WEINBERG, 2008).

Em seguida, a ideia de Guth foi substituída pela teoria de Linde, que propôs que o potencial do ínflaton devesse evoluir lentamente “rolando” um potencial em direção ao mínimo (slow-roll) enquanto o universo e a bolha expandiam exponencialmente. Após, a



energia do campo seria convertida nas partículas ordinárias que conhecemos, preenchendo a bola. Nosso universo observável seria uma pequena parte de uma bolha (WEINBERG, 2008). Essa teoria que ficou conhecida como *nova inflação*.

A ideia fundamental da nova inflação e as suas consequências, dependem somente do slow roll após a formação da bolha, não importando o processo de formação da bolha. Em resumo, existe um campo escalar  $\varphi$ , o ínflaton, que em algum momento inicial assume um valor em que o potencial  $V(\varphi)$  é grande, porém suficientemente plano. O campo escalar  $\varphi$  “rola” muito lentamente no início para o mínimo deste potencial, com isso a constante de Hubble diminui também lentamente, e o Universo experimenta uma expansão relativamente exponencial (WEINBERG, 2008).

O tensor momento-energia de um campo escalar é dado por expressão que possui a mesma forma do tensor para um fluido perfeito (4.34) (WEINBERG, 2008). Com isso, pode-se expressar a densidade de energia e a pressão de um campo escalar  $\varphi$  com potencial  $V(\varphi)$  num espaço-tempo dotado com a métrica de Robertson-Walker como:

$$\rho = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi) \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (6.23)$$

$$p = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi) \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi), \quad (6.24)$$

Fazendo com que a equação (5.44) fique:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \quad (6.25)$$

De acordo com a (5.53), podemos escrever que  $H$ , no período em que a inflação pelo campo escalar é dominante, é dado por:

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right)}. \quad (6.26)$$

Agora, fazendo a derivado do quadrado de (6.26) e usando a (6.25), podemos expressar a derivada temporal de  $H$  como:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3}(\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + V'(\varphi)\dot{\varphi}) = -8\pi GH\dot{\varphi}^2 \quad \rightarrow \quad \dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2. \quad (6.27)$$

O que vai permitir que a expansão aconteça de modo quase exponencial é o termo  $\left|\frac{\dot{H}}{H}\right| \cdot \frac{1}{H}$ , devemos ter que:

$$\left|\frac{\dot{H}}{H}\right| \cdot \frac{1}{H} \ll 1 \quad \rightarrow \quad |\dot{H}| \ll H^2. \quad (6.28)$$

Em termos das (6.26) e (6.27), significa que:

$$\dot{\varphi}^2 \ll |V(\varphi)|, \quad (6.29)$$

isso resulta em  $p \simeq -\rho$ , e portanto a  $H$  fica:

$$H \simeq \sqrt{\frac{8\pi G V(\varphi)}{3}} \quad (6.30)$$

Normalmente, supõe-se que o termo  $\left| \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \right| \cdot \frac{1}{H}$  em  $\dot{\varphi}$ , durante o tempo de expansão  $\frac{1}{H}$ , também seja muito menor que 1 (WEINBERG, 2008), ou seja:

$$|\ddot{\varphi}| \ll H|\dot{\varphi}|, \quad (6.31)$$

assim, podemos negligenciar o termo  $\ddot{\varphi}$  em (6.25), ficando com:

$$3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = -\frac{V'(\varphi)}{3H} = \frac{V'(\varphi)}{\sqrt{24\pi G V(\varphi)}}. \quad (6.32)$$

E, também, podemos expressar a variação na taxa de expansão  $H$ , num tempo  $\frac{1}{H}$  como sendo (WEINBERG, 2008):

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \left| \frac{V'(\varphi)\dot{\varphi}}{V^{3/2}(\varphi)} \right| = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'(\varphi)\dot{\varphi}}{V^{3/2}(\varphi)} \right)^2, \quad (6.33)$$

fazendo com que a expansão exponencial do universo dure o suficiente para que seu tamanho aumente por um fator  $e$  (*e-folding*) diversas vezes se tivermos que (WEINBERG, 2008):

$$\left| \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right| \ll \sqrt{16\pi G}. \quad (6.34)$$

Se fizermos a derivada temporal de (6.32) teremos:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{V''(\varphi)\dot{\varphi}}{3H} + \frac{V'(\varphi)\dot{H}}{3H^2} \quad (6.35)$$

$$= \frac{V''(\varphi)V'(\varphi)}{9H^2} - \frac{[V'(\varphi)]^3}{48\pi g V(\varphi)}. \quad (6.36)$$

A (6.34) garante que o último termo em (6.36) seja muito menor do que  $|V'(\varphi)|$ , então para que  $|\dot{\varphi}|$  seja muito menor que  $|V'(\varphi)|$  é (WEINBERG, 2008):

$$\left| \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right| \ll \sqrt{24\pi G}. \quad (6.37)$$

As equações (6.34) e (6.37) são as duas condições que garantem o slow roll de  $\varphi$  e  $\dot{\varphi}$  (WEINBERG, 2008). Com essas condições, podemos fazer então que, durante um intervalo de tempo, o campo  $\varphi(t)$  varie de um valor inicial  $\varphi(t_1)$  para um valor final  $\varphi(t_2)$ ,

onde  $0 < V(\varphi_2) < V(\varphi_1)$ . O fator de escala, durante esse intervalo, irá aumentar por um fator de:

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} H dt \right\} \quad (6.38)$$

$$= \exp \left\{ \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} \frac{H d\varphi}{\dot{\varphi}} \right\} \quad (6.39)$$

$$\simeq \exp \left\{ \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} \left( \frac{8\pi G V(\varphi)}{V'(\varphi)} \right) d\varphi \right\}. \quad (6.40)$$

Nesse âmbito, o potencial  $V(\varphi)$  é positivo e diminui conforme  $\varphi(t)$  rola de  $\varphi(t_1)$  para  $\varphi(t_2)$ . A (6.34) garante que o argumento em (6.40) é muito maior que  $\sqrt{4\pi G}|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|$ , portanto fica garantido que um número suficientemente grande de  $e$ -folding acontecem em qualquer intervalo de tempo no qual  $\varphi(t)$  varie ao menos por uma quantidade da ordem de  $\frac{1}{\sqrt{4\pi G}}$  (WEINBERG, 2008).

Com isso, a visão final que podemos ter da evolução inicial do nosso Universo, em face da teoria da inflação, é de que no seu primórdio houve uma rápida expansão exponencial fazendo com que o seu tamanho aumentasse em várias ordens de magnitude. Após isso houve o processo de reheating que retorna o universos às condições iniciais e com a evolução seguinte se dá pela teoria do universo quente comumente conhecida.

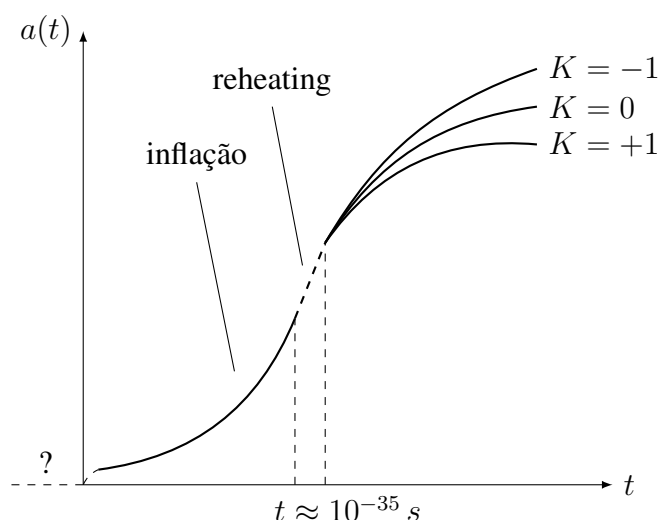


Figura 8 – Evolução da expansão do universo em relação ao tempo, adotando um período inflacionário.

## 7 Conclusões

Iniciamos o presente texto apresentando os fundamentos da relatividade especial e o desenvolvimento da teoria, apresentando o ferramental teórico e matemático necessário para o entendimento da mesma. Com isso, fomos capazes de aprofundar o estudo da teoria da relatividade geral e expor seu papel no estudo da cosmologia moderna.

Diante disso, introduzimos os conceitos básicos da cosmologia, bem como uma introdução da dinâmica e evolução do nosso Universo. Apresentamos os problemas que surgiram com as teorias e introduzimos a noção de modelos cosmológicos com fase inflacionária.

A teoria da inflação cósmica fundamenta um grande sucesso da física moderna, no âmbito tanto da cosmologia como da física de partículas elementares. Sob à luz da inflação, o entendimento do universo primordial se molda através de inesperados caminhos.

A inflação também surge como solução para os problemas encontrados nos mais bem sucedidos modelos e equações atuais, de modo que confirma diversos dados experimentais que sem ela não compreenderíamos. A hipótese de um campo escalar rolando suavemente em direção a um mínimo de potencial se mostra uma ótima candidata para a inflação.

A suposição de um período de expansão exponencial nos primeiros instantes do universo resultou em diversos trabalhos e observações por meio de sondas espaciais, que estudam de forma criteriosa as flutuações nas CMB e realizam medidas dos parâmetros que são previstos pela inflação.

Entretanto, embora se configure a reafirmação de um paradigma, devido a arbitrariedade na escolha do campo escalar  $\varphi$ , o ínflaton, surgem diversas abordagens e modelos para a teoria, constituindo, assim, um próspero e profundo campo de pesquisa na física atual.

# Referências

- ACEVEDO, O.; MORAIS, E. de; PIMENTEL, B. O Princípio de Equivalência. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 41, n. 3, 2019.
- ADE, P. A. R.; AGHANIM, N.; ARMITAGE-CAPLAN, C. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological Parameters. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 571, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321591>>.
- ALDROVANDI, R.; BARROS, P. B.; PEREIRA, J. G. **The Equivalence Principle Revisited**. 2002. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0212034.pdf>>.
- CARMO, M. P. D. **Riemannian Geometry**. [S.l.]: Birkhäuser, 1992.
- CARROLL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9712019.pdf>>.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- CÉSAR, H. L.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. A deflexão gravitacional da luz: De Newton a Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 41, 2019.
- D'INVERNO, R. A. **Introducing Einstein's Relativity**. New York: Clarendon Press, 1992.
- EDDINGTON, A. S. **The Mathematical Theory of Relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1924.
- EINSTEIN, A. Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. **Calouste Gulbekian**, Lisboa, 1983.
- EINSTEIN, A. Sobre a influência da gravidade na propagação da luz. **Calouste Gulbenkian**, Lisboa, 1983.
- ELLIS, G. F. R. **Issues in the Philosophy of Cosmology**. 2006. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0602280.pdf>>.
- FALCIANO, F. Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 31, n. 4, p. 4308–4317, 2009.
- FIXSEN, D.; CHENG, E.; GALES, J. et al. The cosmic microwave background spectrum from the full coBE\* firas data set. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 473, n. 2, p. 576, 1996.
- GAMOW, G. The Origin of Elements and the Separation of Galaxies. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 74, p. 505–506, 1948. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.505.2>>.
- GREINER, W. **Classical Mechanics: Point Particles and Relativity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>>.
- HIGGS, P. W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 13, p. 508–509, 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>>.
- HOOFT, G. Magnetic monopoles in unified gauge theories. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 276–284, 1974.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/15/3/168>>.
- JAMMER, M. **Concepts of Space: The History of Theories of Space in Physics**. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- JR, O. F.; JR, O. P.; BROMBERG, J. L. **Teoria Quântica: Estudos históricos e implicações culturais**. [S.l.]: Eduepb, 2011.
- KOFMAN, L.; LINDE, A.; STAROBINSKY, A. A. Reheating after Inflation. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 73, n. 24, p. 3195–3198, 1994. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.3195>>.
- KOLÁR, I.; MICHOR, P. W.; SLOVÁK, J. **Natural Operations in Differential Geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The Early Universe**. [S.l.]: CRC press, 2018.
- KUHN, T. S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. São Paulo: Perspectivas, 1970.
- LINDE, A. **Particle Physics and Inflationary Cosmology**. [S.l.: s.n.], 2005.
- MOSS, I. G. Primordial inflation with spontaneous symmetry breaking. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 154, n. 2-3, p. 120–124, 1985.
- NOVELLO, M.; NETO, N. P.; BERGLIAFFA, S. E. P. **Programa Mínimo de Cosmologia**. [S.l.]: Jauá Editora, 2010.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 2. ed. [S.l.]: E. Blücher, 2014. v. 4.
- O’CONNOR, J.; ROBERTSON, E. General Relativity. **Mathematical Physics index**, 1996.
- PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419–421, 1965. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1965ApJ...142..419P>>.
- PESKIN, M. **An Introduction to Quantum Field Theory**. [S.l.]: CRC press, 2018.
- PRESKILL, J. P. Cosmological production of superheavy magnetic monopoles. **Physical Review Letters**, APS, v. 43, n. 19, p. 1365, 1979.

RINDLER, W. **Introduction to Special Relativity**. [S.l.]: Oxford Science Publications, 1982.

RINDLER, W. **Relativity: Special, General and Cosmological**. [S.l.]: Oxford Science Publications, 2006.

ROLL, P. G.; WILKINSON, D. T. Cosmic Background Radiation at 3.2 cm-Support for Cosmic Black-Body Radiation. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 16, p. 405–407, 1966. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.16.405>>.

SAADEH, D.; FEENEY, S. M.; PONTZEN, A. et al. How Isotropic is the Universe? **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 117, n. 13, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.131302>>.

SOUZA, R. E. D. **Introdução à Cosmologia**. São Paulo: Edusp, 2004.

SYNGE, J. L.; SCHILD, A. **Tensor Calculus**. [S.l.]: Courier Corporation, 1969. v. 5.

TINO, G. M.; CACCIAPUOTI, L.; CAPOZZIELLO, S.; LAMBIASE, G.; SORRENTINO, F. **Precision Gravity Tests and the Einstein Equivalence Principle**. 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2002.02907.pdf>>.

WALD, R. M. **General Relativity**. [S.l.]: Chicago, University of Chicago Press, 1984, 504 p, 1984.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972.

WEINBERG, S. **Cosmology**. [S.l.]: Oxford university press, 2008.

YADAV, J. K.; BAGLA, J. S.; KHANDAI, N. Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16612.x>>.

# APÊNDICE A – Solução de Schwarzschild

Sabendo que o elemento de linha de uma esfera bidimensional pode ser escrito por (D'INVERNO, 1992):

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{A.1})$$

é lógico pensar que se é possível fazer uma extensão a quatro dimensões usando as coordenadas  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $r$  e  $t$ , em que se reduza à (A.1) no caso de se ter  $r$  e  $t$  constantes. Um *ansatz* inicial seria supor que exista um sistema de coordenadas tal que:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi), \quad (\text{A.2})$$

onde o elemento de linha se dá por:

$$ds^2 = A dt^2 - 2B dt dr - C dr^2 - D(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{A.3})$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são funções arbitrárias de  $r$  e  $t$ , *i.e.*  $A = A(t, r)$ ,  $B = B(t, r)$ ,  $C = C(t, r)$  e  $D = D(t, r)$ . Podemos fazer uma mudança de variáveis dada por:

$$r \rightarrow r' = \sqrt{D}, \quad (\text{A.4})$$

fazendo com que a (A.3) fique:

$$ds^2 = A' dt^2 - 2B' dt dr' - C' dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.5})$$

Vamos olhar separadamente para os dois primeiros termos. Seja a seguinte diferencial:

$$A' dt - B' dr'. \quad (\text{A.6})$$

Podemos multiplicar esse termo por um fator integrante  $I = I(t, r')$  que torna a diferencial exata. Com isso, podemos definir uma nova coordenada tempo  $t'$  onde (D'INVERNO, 1992):

$$dt' = I (A' dt - B' dr'), \quad (\text{A.7})$$

que tomando o quadrado:

$$dt'^2 = I^2 (A'^2 dt^2 + B'^2 dr'^2 - 2A'B' dt dr') \quad (\text{A.8})$$

$$I^{-2} dt'^2 = A'^2 dt^2 + B'^2 dr'^2 - 2A'B' dt dr' \quad (\text{A.9})$$

$$A'^{-1} I^{-2} dt'^2 - A'^{-1} B'^2 dr'^2 = A' dt^2 - 2B' dt dr'. \quad (\text{A.10})$$



Usando a (A.10), temos que a (A.3) fica:

$$ds^2 = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - (C' - A'^{-1}B'^2)dr' - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{A.11})$$

e usando as seguintes funções, para auxiliar nas contas:

$$A'^{-1}I^{-2} = \beta \quad \text{e} \quad C' - A'^{-1}B'^2 = \alpha, \quad (\text{A.12})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são funções de  $t$  e  $r$ , *i.e.*  $\alpha = \alpha(t, r)$  e  $\beta = \beta(t, r)$ . De modo que podemos escrever o elemento de linha como:

$$ds^2 = \beta dt^2 - \alpha dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.13})$$

Com isso, as componentes não nulas do tensor métrico são<sup>15</sup> (WEINBERG, 1972):

$$g_{tt} = -\beta \quad , \quad g_{rr} = \alpha \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad \text{e} \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta. \quad (\text{A.14})$$

Usando estas, podemos calcular as componentes da conexão afim usando a fórmula já vista em (3.35). Os termos não nulos são (WEINBERG, 1972):

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{\alpha} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2\theta}{\alpha} \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2\alpha} \frac{d\beta}{dr} & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta \quad , \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta & \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2\beta} \frac{d\beta}{dr} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

e assim, podemos construir o tensor de Ricci, dado por (WEINBERG, 1972):

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda. \quad (\text{A.16})$$

Colocando os valores de (A.15) na (A.16) achamos as componentes não nulas do tensor de Ricci (WEINBERG, 1972):

$$R_{rr} = \frac{d^2\beta}{dr^2} \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{4} \left( \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\beta} \right) \left( -\frac{d\alpha}{dr} \frac{1}{\alpha} + \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\beta} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} \frac{1}{\alpha} \quad (\text{A.17})$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2\alpha} \left( -\frac{d\alpha}{dr} \frac{1}{\alpha} + \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\beta} \right) - \frac{1}{\alpha} \quad (\text{A.18})$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \quad (\text{A.19})$$

$$R_{tt} = -\frac{d^2\beta}{dr^2} \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial_r \beta}{\alpha} \right) \left( -\frac{d\alpha}{dr} \frac{1}{\alpha} + \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\beta} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\alpha} \quad (\text{A.20})$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu. \quad (\text{A.21})$$

<sup>15</sup> Aqui vamos usar que as coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  correspondem à  $(0, 1, 2, 3)$

Agora podemos aplicar esses resultados na equação de campo para o vácuo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (\text{A.22})$$

Só há duas possibilidades dessa equação ser válida, ou  $R_{\mu\nu} = 0$  ou  $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ . A segunda opção pode ser reescrita como:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \quad (\text{A.23})$$

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.24})$$

Uma vez que  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\mu} = 4$  e  $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$  teríamos que a (A.24) fica:

$$R = \frac{1}{2}R \quad \longrightarrow \quad 1 = 2, \quad (\text{A.25})$$

o que é impossível, portanto a equação de campo no vácuo se reduz à:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.26})$$

É suficiente fazer as  $R_{rr}$ ,  $R_{tt}$  e  $R_{\theta\theta}$  irem a zero para satisfazer a (A.26) (WEINBERG, 1972). Pelas (A.17) e (A.20) podemos ver que:

$$\frac{R_{rr}}{\alpha} + \frac{R_{tt}}{\beta} = -\frac{1}{A} \left( \frac{d\alpha}{dr} \frac{1}{\alpha} + \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\beta} \right), \quad (\text{A.27})$$

com isso, para que a (A.26) seja válida, devemos ter que:

$$\frac{d\alpha}{dr} \frac{1}{\alpha} + \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\beta} \quad \longrightarrow \quad \alpha(r)\beta(r) = \text{constante}. \quad (\text{A.28})$$

Se impusermos uma condição de contorno tal que para  $r \rightarrow \infty$  temos que o tensor métrico se aproxime de  $\eta_{\mu\nu}$  em coordenadas esféricas, temos que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) = 1, \quad (\text{A.29})$$

então a (A.28) vale:

$$\alpha(r) = \frac{1}{\beta(r)}, \quad (\text{A.30})$$

tornando a (A.27) igual a zero, então resta fazer  $R_{rr}$  e  $R_{\theta\theta}$  irem a zero (WEINBERG, 1972). A (A.30) também nos mostra que (A.17) e (A.18) ficam:

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{d\beta}{dr}r + \beta \quad (\text{A.31})$$

$$R_{rr} = \frac{d^2\beta}{dr^2} \frac{1}{2\beta} + \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{r\beta} = \frac{dR_{\theta\theta}}{dr} \frac{1}{2r\beta}. \quad (\text{A.32})$$

Como devemos ter  $R_{\theta\theta}$  indo a zero, podemos dizer que:

$$\frac{d\beta}{dr}r + \beta = \frac{d}{dr}(r\beta) = 1, \quad (\text{A.33})$$

e portanto temos:

$$r\beta = r + \text{constante}. \quad (\text{A.34})$$

Para nos livrarmos da constante, basta fazermos que a grandes distâncias de uma massa central  $M$ , o termo  $g_{tt} = -\beta$  deve ir para  $-1 - 2\phi$ , onde  $\phi$  é o potencial newtoniano dado por  $-MG/r$ . Com isso, a constante de integração é  $-2MG$  e nossas funções  $\alpha$  e  $\beta$  ficam (WEINBERG, 1972):

$$\alpha = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad \beta = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right), \quad (\text{A.35})$$

e assim, o elemento de linha e a métrica ficam da forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{A.36})$$

A (A.36) é conhecida como a *métrica de Schwarzschild* ou *solução de Schwarzschild*, foi desenvolvida por Karl Schawrzschild em 1916, logo após Einstein as publicar, e é válida para qualquer simetria esférica no vácuo (CARROLL, 1997). A solução descreve um um campo gravitacional num espaço vazio exterior a um distribuição de massa  $M$  com simetria esférica em torno de uma orgiem ( $r = 0$ ) (NOVELLO et al., 2010). Nota-se ainda que a (A.36) não é adequada para descrever o espaço-tempo na região  $r \ll 2MG$ , assim o valor limite:

$$r_s = 2MG, \quad (\text{A.37})$$

é chamado de raio de Schwarzschild.

# APÊNDICE B – Solução do campo escalar

Uma breve explicação sobre a solução do campo escalar na equação de movimento de Klein-Gordon. Seja a densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi(x))^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x), \quad (\text{B.1})$$

pela equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} = \partial_\mu \left( \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \right), \quad (\text{B.2})$$

vamos ter que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} = -m^2\varphi(x) \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \right) = \square\varphi(x), \quad (\text{B.4})$$

onde  $\square = \partial^\mu\partial_\mu$ . De modo que a equação de movimento fica:

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Podemos escrever o Operador  $\square$  como:

$$\square = \partial^\mu\partial_\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{B.6})$$

Usando o campo:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}), \quad (\text{B.7})$$

e substituindo em (B.5):

$$\square \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}) = -m^2 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}). \quad (\text{B.8})$$

Resolvendo o lado esquerdo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}) +$$

$$- \nabla^2 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}) = \quad (\text{B.9})$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( \tilde{a}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-ip \cdot x} \right) +$$

$$- \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p}) \nabla^2 e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p}) \nabla^2 e^{-ip \cdot x}) = \quad (\text{B.10})$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})(ip_0)^2 e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})(ip_0)^2 e^{-ip \cdot x}) +$$

$$- \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})(i\mathbf{p})^2 e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})(i\mathbf{p})^2 e^{-ip \cdot x}) = \quad (\text{B.11})$$

$$- p_0^2 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}) +$$

$$+ \mathbf{p}^2 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}) = \quad (\text{B.12})$$

$$= -(E^2 - \mathbf{p}^2) \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}), \quad (\text{B.13})$$

pois  $p_\mu = (E, \mathbf{p})$ . Como temos que  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ , a (B.13) fica:

$$-m^2 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\tilde{a}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \tilde{a}^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}), \quad (\text{B.14})$$

Que é exatamente o lado direito da (B.8). Logo o campo  $\varphi$  é solução da equação de movimento.