UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

UMA ABORDAGEM FRACIONAL PARA A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

GABRIEL DE CARVALHO VILLELA

DR. CRESUS FONSECA DE LIMA GODINHO

SEROPÉDICA
2021

GABRIEL DE CARVALHO VILLELA

UMA ABORDAGEM FRACIONAL PARA A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Física da UFRRJ, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Cresus F. L. Godinho

SEROPÉDICA
2021

GABRIEL DE CARVALHO VILLELA

UMA ABORDAGEM FRACIONAL PARA A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Física da UFRRJ, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Trabalho aprovado. Seropédica, 11 de dezembro de 2021.

Cresus Fonseca de Lima Godinho

Prof. Dr. Cresus Fonseca de Lima Godinho
Orientador

Ion Vancea

Prof. Dr. Ion Vasile Vancea
Convidado

Claudio Porto

Prof. Dr. Claudio Maia Porto
Convidado

SEROPÉDICA
2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, pois mesmo eu não sendo um exemplo de cristão, foi a fé que me ajudou em muitos momentos desta caminhada. Agradeço também aos meus pais, Michele e Daniel, que sempre me ajudaram no que estava ao seu alcance, me possibilitando chegar até aqui. À todos da minha família que me apoiaram e/ou me incentivaram a chegar até este momento. Se cheguei até aqui foi graças à todos vocês.

Agradeço aos amigos que partilharam comigo esta caminhada. Àqueles que riram comigo, que sofreram juntos nas matérias, que me ofereceram um ombro amigo quando precisei, que me aturavam e que dedicavam uma parte de seu tempo para conversar comigo, sou muito grato à todos vocês. Ao meu grupinho de amigos favorito, que está comigo desde antes desta caminhada se tornar cansativa, e se tornaram a minha principal válvula de escape em diversos momentos. Também preciso fazer um agradecimento especial à minha namorada, Giulie, pois não sei se este trabalho estaria pronto se não fosse todo o incentivo e força que ela me deu.

Agradeço ao meu orientador, Cresus, por toda a paciência que teve comigo nessa longa jornada para a confecção deste trabalho. Aos professores que me acompanharam durante a graduação e colaboraram na construção do profissional que me tornei, seja pelas aulas ministradas, pelas conversas nos corredores, ou pela forma única de lidar com seus alunos.

RESUMO

O propósito deste trabalho é a confecção de uma equação de Euler-Lagrange utilizando a abordagem de Riemann-Liouville para derivadas e integrais de ordem não-inteiras. A utilização de derivadas e integrais de ordem não-inteiras é chamada popularmente de cálculo fracional. Propõe-se, assim, apresentar uma introdução à abordagem de Riemann-Liouville para o cálculo fracional, assim como algumas de suas propriedades e exemplos, e uma revisão sobre cálculo variacional, a fim de, com ambos estes conceitos, obter-se uma equação de Euler-Lagrange fracional. Para uma análise da equação confeccionada, fez-se uma aplicação para o oscilador harmônico simples, onde observou-se a alteração na solução original devido à presença de termos provenientes da abordagem fracional. Estes termos caracterizam um ganho ou perda de energia e uma alteração na fase da solução original do oscilador harmônico simples. Com a análise apresentada, torna-se evidente as alterações que a utilização de derivadas de ordem não-inteiras provocam na equação de Euler-Lagrange.

Palavras-chave: Cálculo fracional, cálculo variacional, equação de Euler-Lagrange.

ABSTRACT

The purpose of this work is the production of an Euler-Lagrange equation using the Riemann-Liouville approach to non-integer order derivatives and integrals. The use of non-integer order derivatives and integrals is popularly called fractional calculus. It is, therefore, proposed to present an introduction about the Riemann-Liouville approach to the fractional calculus, as well as some of their properties and examples, and a review about variational calculus, in order to get a fractional Euler- Lagrange equation, with both these concepts. For an analysis of the produced equation, an application was created for the simple harmonic oscillator, were it was observed the change in the original solution due to the presence of terms deriving from the fractional approach. These terms describe an energy gain or loss and an alteration in the original solution phase of the simple harmonic oscillator. With the presented analysis it make evident the alterations caused by the use of non-integer order derivatives in the Euler-Lagrange equation.

Keywords: Fractional calculus, variational calculus, Euler-Lagrange equation.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com quase a mesma idade que o cálculo diferencial e integral, o cálculo fracional representa uma poderosa ferramenta matemática para diversos problemas de diferentes campos da ciência e engenharia. A discussão sobre o conceito de cálculo fracional surge de um simples questionamento, feito por L'Hôpital, sobre a utilização de um índice de valor semi inteiro na notação de derivada apresentada por Leibniz. Este questionamento foi sendo desenvolvido através dos séculos, resultando em diversas abordagens para a generalização do cálculo diferencial e integral para ordens não-inteiras. Na atualidade, essas abordagens têm sido aplicadas em diversos campos de estudos. Um interessante campo de estudo desta ferramenta matemática é o estudo de problemas fracionais no cálculo variacional e suas respectivas equações de Euler-Lagrange. Podemos encontrar diversos trabalhos de diversos autores trabalhando com diferentes abordagens de cálculo fracional pra o desenvolvimento dessas 'equações de Euler-Lagrange fracionais'. Inspirados em alguns desses trabalhos, desenvolvemos uma equação de Euler-Lagrange fracional utilizando as definições de derivada e integral fracional de Riemann-Liouville, que é uma das abordagens mais famosas para o cálculo fracional. Para testarmos a equação obtida, decidimos realizar uma aplicação dessa equação para o oscilador harmônico simples.

Este trabalho tem como objetivo a construção dessa equação de Euler-Lagrange fracional. Com isso em mente, dedicamos o segundo capítulo à uma introdução à abordagem de Riemann-Liouville para o cálculo fracional, pois esta foi a abordagem escolhida para a construção da nossa equação. Tomando como base o livro de Samko, Kilbas e Marichev (1993), partimos da apresentação da equação integral de Abel, a fim de apresentarmos uma definição de derivada e integral de Riemann-Liouville matematicamente bem fundamentada. Assim seguimos para a apresentação das definições de derivada e integral fracionais e algumas propriedades básicas, que serão relevantes na construção da nossa equação de Euler-Lagrange fracional. A fim de ilustrar as definições apresentadas, apresentamos alguns exemplos de integral fracional.

No terceiro capítulo apresentamos uma revisão sobre a equação de Euler-Lagrange. Partindo do cálculo variacional, obtemos a equação de Euler-Lagrange, e em seguida fundamentamos ela utilizando os conceitos de vínculos holônomos, coordenada generalizadas e o princípio da mínima ação.

O quarto capítulo é inteiramente dedicado à nossa equação de Euler-Lagrange fracional. Na primeira parte desse capítulo, utilizamos os conceitos e propriedades apresentados nos capítulos anteriores para desenvolver a nossa equação. Em seguida, analisamos o resultado obtido, comparando-o com as equações de Euler-Lagrange fracionais obtidas nos trabalhos de

Muslih e Baleanu (2007), David e Valentim (2015), El-Nabulsi e Torres (2007) e El-Nabulsi (2005). Na última parte deste trabalho, aplicamos a nossa equação de Euler-Lagrange fracional para o oscilador harmônico simples e analisamos o gráfico da solução obtida para diferentes valores dos termos que surgem devido à abordagem fracional.

2 CÁLCULO FRACIONAL

O conceito de derivada e integral é familiar para os pesquisadores e estudantes que tiveram contato com as disciplinas de cálculo. Quando abordamos esse conceito, podemos utilizar algumas formas de representação. Uma das mais comuns é a apresentada por Gottfried Wilhelm Leibniz em 1684 (FULINI, 2017),

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \,. \tag{2.1}$$

Segundo Loverro (2004), muitos autores citam o dia 30 de setembro de 1695 como a data de nascimento do cálculo fracional. Nessa data, o matemático francês Guillaume François Antoine de L'Hôpital escreveu uma carta para Leibniz, questionando-o qual seria o resultado de (2.1) se $n = 1/2$. "Um paradoxo aparente, no qual consequências úteis um dia serão traçadas" foi a resposta de Leibniz (LOVERRO, 2004). Posteriormente esse questionamento evoluiu para um patamar de maior abrangência, onde os pesquisadores começaram a questionar se n poderia ser qualquer número, seja ele fracional, irracional ou complexo. Por conta disso, o nome 'cálculo fracional' se tornou um termo errôneo e poderia ser substituído por 'integração e diferenciação de ordem arbitrária' (MILLER; ROSS, 1993).

O primeiro passo para a formalização desse cálculo foi tomado por Euler, em 1738 (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993). Ele observou que o resultado da derivada $\frac{d^n x^p}{dx^n}$ da função de potência x^p possui significado para n não-inteiro. Em 1812, P. S. Laplace propôs uma definição para a derivada fracional em termos de uma integração (MILLER; ROSS, 1993). S. F. Lacroix, em seu tratado de 1820, repetiu a ideia de Euler e obteve uma fórmula para a derivada $\frac{d^{1/2} x^p}{dx^{1/2}}$, que coincide com os resultados atuais (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993).

A próxima figura relevante na história de cálculo fracional foi J. B. J. Fourier, que em 1822 sugeriu a ideia de utilizar a igualdade

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p \, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(\lambda x - t\lambda + p\pi/2\right) dt \,, \tag{2.2}$$

no intuito de definir a derivada de ordem não-inteira. A definição (2.2) foi a primeira definição de derivada de ordem positiva arbitrária, aplicável para qualquer função suficientemente 'boa' , não necessariamente uma função de potência.

Segundo Samko, Kilbas e Marichev (1993), a história do cálculo fracional começa propriamente com os trabalhos de N. H. Abel e J. Liouville. O foco do trabalho de Abel era a solução do problema da braquistócrona, o qual resolveu sem utilizar o conceito de cálculo fracional, porém ele mostrou como a solução poderia ser escrita como uma derivada fracional (BUTZER; WESTPHAL, 2000). Os trabalhos de Abel de 1823 e de 1826, os trabalhos de Liouville publicados entre 1832 e 1837 e o trabalho de G. F. B. Riemann publicado postumamente em 1876, dão origem ao que conhecemos hoje como cálculo fracional de Riemann-Liouville. Segundo Miller e Ross (1993), a forma da integral conhecida como integral fracional de Riemann-Liouville foi obtida po H. Laurent em 1884.

Segundo David, Linares e Pallone (2011), desde o nascimento do cálculo diferencial e integral, a generalização para ordens não-inteiras têm sido objeto de diversas abordagens. Por conta disso, existem várias definições de cálculo fracional que são comprovadamente equivalentes. Algumas das definições que mais se popularizaram entre os pesquisadores da área são as definições de Riemann-Liouville, de Grunwald-Letnikov e de Caputo.

Para este trabalho, escolhemos a abordagem de Riemann-Liouville para o cálculo fracional. A escolha desta abordagem não possui nenhum motivo específico. Nas seções que seguem, apresentaremos as definições de Riemann-Liouville para a integral e a derivada fracional.

2.1 A equação integral de Abel

Segundo Samko, Kilbas e Marichev (1993), a ideia da integração fracional de Riemann-Liouville está conectada com a equação integral de Abel, então é conveniente discutirmos sobre esta equação antes de partirmos para a definição da integral fracional propriamente dita.

A equação integral

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}} = f(x)\,, \qquad x > 0\,, \tag{2.3}$$

onde $0 < \mu < 1$, é chamada de equação integral de Abel. A função $\Gamma(\mu)$ é chamada função gamma. Segundo Loverro (2004) interpretação mais básica da função gamma é simplesmente a generalização do fatorial para todos os números reais.

Definição 2.1. A integral de Euler de segundo tipo

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x}\, dx\,, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0\,,$$

é chamada de função gamma.

Vamos supor que (2.3) é analisada em um intervalo finito $[a, b]$, onde $a > -\infty$. Com essas considerações, vamos reescrever (2.3) como (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993)

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}} = f(x)\,, \qquad x > a\,. \tag{2.4}$$

Realizando a troca de variáveis $x \to t$ e $t \to s$ em (2.4), multiplicando os dois lados da equação por $(x-t)^{-\mu}$ e integrando, chegamos a

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\mu} \int_a^t \frac{\varphi(s)\, ds}{(t-s)^{1-\mu}} = \Gamma(\mu) \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^\mu} \,. \tag{2.5}$$

Para prosseguir com o desenvolvimento, vamos introduzir a 'fórmula de Dirichlet'. Para introduzir esta fórmula, vamos primeiro definir o teorema de Fubini, que nos permite trocar a ordem de integração em integrais sucessivas (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993).

Teorema 2.1 (Teorema de Fubini)**.** Seja $\Omega_1 = [a,b]$, $\Omega_2 = [c,d]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$, e seja $f(x,y)$ uma função mensurável definida em $\Omega_1 \times \Omega_2$. Se pelo menos uma das integrais

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y) dy \,, \quad \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y) dx \,, \quad \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y) dx dy \,,$$

é absolutamente convergente, então elas coincidem.

A fórmula de Dirichlet,

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx \,, \tag{2.6}$$

é um caso particular do teorema de Fubini, onde assumimos que uma das integrais de (2.6) é absolutamente convergente.

Utilizando (2.6), podemos mudar a ordem de integração da parte esquerda de (2.5), obtendo

$$\int_a^x \varphi(s)\, ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\mu (t-s)^{1-\mu}} = \Gamma(\mu) \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^\mu} \,. \tag{2.7}$$

Vamos fazer a troca de variável $t \to s + \tau(x-s)$. Assim, a equação (2.7) vai ser reescrita como

$$\int_a^x \varphi(s)\, ds \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{1-\mu}\, (1-\tau)^\mu} = \Gamma(\mu) \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^\mu} \,. \tag{2.8}$$

Definição 2.2. A integral de Euler de primeiro tipo

$$B(z,w) = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-z}\, (1-x)^{1-w}} \,, \qquad \operatorname{Re} z > 0 \,, \quad \operatorname{Re} w > 0 \,,$$

é chamada de função beta. A função beta é conectada com a função gamma pela relação

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\,. \tag{2.9}$$

Podemos ver em (2.8) que a integral em τ é uma função beta, logo, utilizando a relação (2.9), podemos reescrever a equação como

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds\,[B(\mu, 1-\mu)] = \Gamma(\mu)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}$$

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds\,[\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)] = \Gamma(\mu)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}$$

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}\,. \tag{2.10}$$

Derivando os dois lados da equação (2.10) em relação a x, chegamos a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}\,. \tag{2.11}$$

Logo, se (2.3) possui solução, essa solução vai ser necessariamente dada por (2.11) e, por essa razão, esta será única (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993). Lembrando que consideramos $0 < \mu < 1$. Este é um caso mais simples, porém, veremos nas próximas seções a solução da equação integral de Abel para $\mu > 1$.

De forma quase análoga, podemos obter a solução para a equação integral de Abel da forma

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\mu}} = f(x)\,, \qquad x \leq b\,. \tag{2.12}$$

Seguindo os mesmos passos apresentados para a equação (2.4), chegamos na solução

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\,\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\mu}}\,. \tag{2.13}$$

Samko, Kilbas e Marichev (1993) também chamam a solução da equação de Abel de “fórmula de inversão”.

Para finalizar a discussão dessa seção, precisamos elucidar sobre quais condições em $f(x)$

a equação de Abel é solucionável. Para avançarmos de (2.5) para (2.7), utilizamos a fórmula de Dirichlet, que é um caso particular do teorema de Fubini. Porém esse teorema é uma propriedades dos espaços L_p. Samko, Kilbas e Marichev (1993) utilizam a notação $L_p = L_p(\Omega)$ para o conjunto de todas as funções mensuráveis de Lebesgue $f(x)$, para as quais

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \, < \, \infty \, ,$$

sendo $\Omega = [a, b], -\infty \leq a < b \leq \infty$.

Uma função mensurável é uma função $f : X \to Y$ onde $f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \mathcal{A}$, ou seja, $f^{-1}(G) \subseteq \mathcal{A}$ para qualquer conjunto aberto $G \subseteq Y$, onde $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável, Y é um espaço métrico e τ_Y a família de conjuntos abertos de Y. Se $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{L}$, então f é chamada de função mensurável de Lebesgue (PETROVAI, 2020).

Definição 2.3. Uma função $f(x)$ é chamada absolutamente contínua em um intervalo Ω, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer conjunto finito de intervalos não intersectados em pares $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \ldots, n$, onde

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k = a_k) < \delta \, ,$$

a inequação

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \, ,$$

é válida. O espaço dessas funções é denotado por $AC(\Omega)$.

Com essas informações, Samko, Kilbas e Marichev (1993) escrevem os teoremas apresentados a seguir. Esses teoremas apresentam sobre quais condições em $f(x)$ as equações (2.4) e (2.12) são solucionáveis.

Teorema 2.2. A equação de Abel (2.4) com $0 < \mu < 1$ é solucionável em $L_1(a, b)$ se e somente se

$$f_{1-\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^\mu} \in AC([a, b]) \qquad \text{e} \qquad f_{1-\mu}(a) = 0 \, .$$

Essas condições sendo satisfeitas, a equação possui solução única dada por (2.11).

Teorema 2.3. A equação de Abel (2.12) com $0 < \mu < 1$ é solucionável em $L_1(a, b)$ se e somente se

$$\tilde{f}_{1-\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\mu}} \in AC([a,b]) \qquad \text{e} \qquad \tilde{f}_{1-\mu}(b) = 0\,.$$

Essas condições sendo satisfeitas, a equação possui solução única dada por (2.13).

A discussão que foi apresentada nesta seção será relevante na definição da integral e da derivada fracional de Riemann-Liouville. Essas definições serão apresentadas na próxima seção.

2.2 Integral e derivada fracional de Riemann-Liouville

O nosso ponto de partida para apresentarmos o formalismo de Riemann-Liouville para o cálculo fracional, é uma generalização para integrações repetitivas (BUTZER; WESTPHAL, 2000).

Definição 2.4. Se f é integrável localmente em (a,∞), então a integral iterada 'n' vezes é dada por

$$\int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 \cdots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n)\,du_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(u)\,du}{(x-u)^{1-n}}\,, \tag{2.14}$$

para quase todo x com $-\infty \leq a < x < \infty$ e $n \in \mathbb{N}$.

Também podemos escrever a integral (2.14) para $-\infty < x < b \leq \infty$ da forma

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \frac{f(u)\,du}{(u-x)^{1-n}}\,. \tag{2.15}$$

Como $(n-1)! = \Gamma(n)$, observamos que as integrais (2.14) e (2.15) fazem sentido para valores não inteiros de n. Assim, podemos generalizar as integrais para se tornarem integrais de ordem não-inteira substituindo n por um número real arbitrário μ, onde $\mu > 0$ (GORENFLO; MAINARDI, 1997). Assim, segundo Samko, Kilbas e Marichev (1993), é natural definir a integração de ordem não-inteira da forma apresentada a seguir.

Definição 2.5. Seja $f(x) \in L_1(a,b)$. As integrais

$${}_aD_x^{-\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}\,, \tag{2.16}$$

$${}_xD_b^{-\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\mu}}\,, \tag{2.17}$$

onde $\mu > 0$, são chamadas de integrais fracionais de ordem μ.

Na definição 2.5, estamos utilizando os operadores ${}_aD_x^{-\mu}$ e ${}_xD_b^{-\mu}$ para as integrais fracionais, semelhantes ao apresentado em Miller e Ross (1993). Os sobrescritos representam os limites inferior e superior da integração.

As integrais (2.16) e (2.17) normalmente são chamadas de integral fracional esquerda e direita de Riemann-Liouville, respectivamente. Podemos observar que essas integrais são equações integrais de Abel, mostradas em (2.4) e (2.12). Segundo Samko, Kilbas e Marichev (1993), essas integrais são definidas para funções $f(x) \in L_1(a,b)$, que são existentes em quase todo lugar.

Para a derivada fracional, é natural a introduzirmos como a operação inversa da integral fracional. Como as integrais (2.16) e (2.17) consistem nas equações de Abel (2.4) e (2.12), e vimos na seção anterior que essas equações de Abel possuem solução (ou inversão) (2.11) e (2.13), chegamos na seguinte definição para as derivadas fracionais (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993).

Definição 2.6. Para funções $f(x)$ dadas no intervalo $[a,b]$, as expressões

$$ {}_aD_x^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}\,, \tag{2.18} $$

$$ {}_xD_b^{\mu} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\mu}}\,, \tag{2.19} $$

são chamadas de derivadas fracionais de ordem μ, $0 < \mu < 1$.

Semelhante ao caso das integrais, na definição 2.6, estamos utilizando os operadores ${}_aD_x^{\mu}$ e ${}_xD_b^{\mu}$ para as derivadas fracionais. Os sobrescritos representam os limites inferior e superior da integração.

As derivadas (2.18) e (2.19) normalmente são chamadas de derivada fracional esquerda e direita de Riemann-Liouville, respectivamente.

Notem que definimos as integrais fracionais para qualquer $\mu > 0$, porém as derivadas fracionais foram introduzidas apenas para $0 < \mu < 1$. Para definir derivadas fracionais de ordem $\mu \geq 1$, vamos considerar um $\nu = n - \mu$, onde n é o menor número inteiro maior que μ (MILLER; ROSS, 1993). Se μ é um número inteiro, a derivada de ordem μ é entendida no sentido da diferenciação usual,

$$ {}_aD_x^{\mu} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu}, \quad {}_xD_b^{\mu} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\mu}, \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.20} $$

Se μ não é um número inteiro, Samko, Kilbas e Marichev (1993) dizem que é natural introduzir as derivadas fracionais por meio das relações

$$
{}_aD_x^{\mu} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n {}_aD_x^{-\nu} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n {}_aD_x^{-(n-\mu)} f(x)\,, \tag{2.21}
$$

$$
{}_xD_b^{\mu} f(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n {}_xD_b^{-\nu} f(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n {}_xD_b^{-(n-\mu)} f(x)\,. \tag{2.22}
$$

Assim, teremos a seguinte definição para derivadas fracionais de ordem $\mu > 0$.

Definição 2.7. Para funções $f(x)$ dadas no intervalo $[a, b]$, as expressões

$$
{}_aD_x^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+\mu-n}}\,, \tag{2.23}
$$

$$
{}_xD_b^{\mu} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1+\mu-n}}\,, \tag{2.24}
$$

são chamadas de derivadas fracionais de ordem μ, $\mu > 0$, onde n é o menor número inteiro maior que μ.

Podemos observar que, para o caso em que $0 < \mu < 1$, a definição 2.7 nos leva para a definição 2.6. Como as derivadas (2.18) e (2.19) são um caso particular das derivadas (2.23) e (2.24), vamos passar a nos referir a (2.23) e (2.24) como as derivadas fracionais esquerda e direita de Riemann-Liouville, respectivamente.

Agora que já apresentamos as definições de integral e derivada do cálculo fracional de Riemann-Liouville, vamos ver algumas propriedades desse formalismo.

2.3 Algumas propriedades básicas

Assim como para as integrais e derivadas convencionais, o formalismo apresentado para as integrais e derivadas fracionais possui diversas relações e propriedades, que podem ser vistas com mais detalhes em Samko, Kilbas e Marichev (1993). Nesta seção, vamos nos ater às relações e propriedades que serão relevantes para o desenvolvimento que será apresentado em capítulos futuros.

A relação

$$
\int_a^b \varphi(x) \left({}_aD_x^{-\mu}\psi\right)(x)\,dx = \int_a^b \psi(x) \left({}_xD_b^{-\mu}\varphi\right)(x)\,dx\,, \tag{2.25}
$$

usualmente chamada de 'fórmula de integração fracional por partes', é uma relação que será explorada neste trabalho. A equação (2.25) é verdadeira se

$$\varphi(x) \in L_p\,, \quad \psi(x) \in L_q\,, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1+\mu\,, \quad p \geq 1\,, \quad q \geq 1\,,$$

com $p \neq 1$, $q \neq 1$ no caso de $p^{-1}+q^{-1}=1+\mu$ (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993).

Definição 2.8. Seja ${}_aD_x^{-\mu}(L_p)$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, o espaço de funções $f(x)$, representadas pela integral fracional esquerda de ordem μ de uma função somável: $f = {}_aD_x^{-\mu}\varphi$, $\varphi \in L_p(a,b)$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.4. Seja $\operatorname{Re}\mu > 0$. Então, a igualdade

$$ {}_aD_x^{\mu}\,{}_aD_x^{-\mu}\varphi = \varphi(x)\,, \tag{2.26}$$

é valida para qualquer função somável $\varphi(x)$, enquanto

$$ {}_aD_x^{-\mu}\,{}_aD_x^{\mu}f = f(x)\,, \tag{2.27}$$

é satisfeita para

$$f(x) \in {}_aD_x^{-\mu}(L_1)\,.$$

A definição 2.8 e o teorema 2.4 usam o termo ‘função somável’. Samko, Kilbas e Marichev (1993) citam o espaço $L_p(\rho)$ como um espaço de funções somáveis, logo, elas são funções mensuráveis de Lebesgue.

Tomando a relação (2.25), assumindo que $f(x) \in {}_xD_b^{-\mu}(L_p)$ e $g(x) \in {}_aD_x^{-\mu}(L_q)$, onde $p^{-1}+q^{-1} \leq 1+\mu$, podemos escrever $\varphi(x) = {}_xD_b^{\mu}f$ e $\psi(x) = {}_aD_x^{\mu}g$, assim, podemos reescrever (2.25) como

$$\int_a^b \left({}_xD_b^{\mu}f\right)\left[{}_aD_x^{-\mu}\left({}_aD_x^{\mu}g\right)\right](x)\,dx = \int_a^b \left({}_aD_x^{\mu}g\right)(x)\left[{}_xD_b^{-\mu}\left({}_xD_b^{\mu}f\right)\right](x)\,dx\,. \tag{2.28}$$

Como $f(x) \in {}_xD_b^{-\mu}(L_p)$ e $g(x) \in {}_aD_x^{-\mu}(L_q)$, então podemos utilizar (2.27) em (2.28) para chegar na relação

$$\int_a^b f(x)\left({}_aD_x^{\mu}g\right)(x)\,dx = \int_a^b g(x)\left({}_xD_b^{\mu}f\right)(x)\,dx\,. \tag{2.29}$$

Para que a relação (2.29) seja válida, as funções $f(x)$ e $g(x)$ devem ser contínuas no intervalo $[a,b]$, assim, as derivadas $\left({}_aD_x^{\mu}g\right)(x)$ e $\left({}_xD_b^{\mu}f\right)(x)$ existirão em qualquer ponto $x \in [a,b]$

e serão continuas (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993). A relação (2.29) é o ponto de maior destaque desta seção, pois ela ira exercer um papel importante no desenvolvimento da nossa equação de Euler-Lagrange fracional.

2.4 Alguns exemplos de integral fracional

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados conhecidos de integrais fracionais de algumas funções. Esses exemplos serão apresentados a fim de ilustrar como a utilização do cálculo fracional altera na solução da integral dessas funções. Iremos nos conter ao cálculo das integrais fracionais esquerda de Riemann-Liouville. Como nosso objetivo com essa seção é apenas apresentar alguns exemplos de resultado de integrais fracionais, vamos nos ater ao caso em que $a = 0$ em (2.16).

Nas condições escolhidas, Miller e Ross (1993) nos apresentam os seguintes resultados para as integrais fracionais,

$$ {}_0D_x^{-\mu} x^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} x^{\nu+\mu} , \qquad \nu > -1 \, , \;\; x > 0 \, , \tag{2.30} $$

$$ {}_0D_x^{-\mu} K = \frac{K}{\Gamma(\mu+1)} x^{\mu} , \qquad K \in \mathbb{R} \, , \tag{2.31} $$

$$ {}_0D_x^{-\mu} e^{Ax} = x^{\mu} \, e^{Ax} \, \gamma^*(\mu, Ax) \, , \qquad A \in \mathbb{R} \, , \tag{2.32} $$

onde

$$ \gamma^*(\mu, Ax) = \frac{1}{\Gamma(\mu)(Ax)^{\mu}} \int_0^x \xi^{\mu-1} e^{-\xi} \, d\xi \, , \qquad \mathrm{Re}\, \mu > 0 \, , $$

é chamada função gamma incompleta.

$$ {}_0D_x^{-\mu} \cos(Ax) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x \xi^{\mu-1} \, \cos A(x-\xi) \, d\xi \, , \qquad A \in \mathbb{R} \, , \tag{2.33} $$

$$ {}_0D_x^{-\mu} \,\mathrm{sen}(Ax) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x \xi^{\mu-1} \, \mathrm{sen}\, A(x-\xi) \, d\xi \, , \qquad A \in \mathbb{R} \, . \tag{2.34} $$

Miller e Ross (1993) definem as integrais (2.32), (2.33) e (2.34) como

$$
{}_0D_x^{-\mu} e^{Ax} = E_x(\mu, A)\,,
$$

$$
{}_0D_x^{-\mu} \cos(Ax) = C_x(\mu, A)\,,
$$

$$
{}_0D_x^{-\mu} \operatorname{sen}(Ax) = S_x(\mu, A)\,.
$$

onde essas funções estão relacionadas da seguinte forma,

$$
C_x(\mu, A) = \frac{1}{2}\left[E_x(\mu, iA) + E_x(\mu, -iA)\right]\ ,
$$

$$
S_x(\mu, A) = \frac{1}{2i}\left[E_x(\mu, iA) - E_x(\mu, -iA)\right]\ .
$$

Podemos observar que nos exemplos (2.30) e (2.31), se fizermos $\mu = 1$, vamos obter como resposta a integral convencional dessas funções. No caso dos exemplos (2.32), (2.33) e (2.34), isso também é verdade, mesmo não sendo tão simples de visualizar.

3 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Pautado no cálculo variacional e no princípio de mínima ação de Hamilton, o formalismo desenvolvido por Lagrange para a Mecânica nos permite escrever as equações de movimento da maioria dos sistemas físicos relevantes a partir de uma única função escalar expressa em termos de coordenadas independentes arbitrárias (LEMOS, 2007). O principal mecanismo dessa formulação de Lagrange é a equação de Euler-Lagrange.

As definições que cercam esse formalismo serão relevantes para o desenvolvimento do nosso trabalho, visto que este consiste no desenvolvimento de uma equação de Euler-Lagrange fracional. Nas próximas seções, vamos apresentar uma revisão sobre cálculo variacional e a equação de Euler-Lagrange

3.1 Cálculo variacional

Como ponto de partida dessa revisão sobre cálculo variacional, vamos examinar os seus métodos. O principal problema em que utilizamos este cálculo consiste em achar a curva para a qual uma dada integral de linha possui um valor estacionário (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002).

Vamos considerar uma função F, onde a dependência dessa função na variável x também é intermediada por $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, e assim por diante. Logo,

$$F = F(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, x)\,, \tag{3.1}$$

A função F é definida em um caminho $y = y(x)$, entre dois valores $x = a$ e $x = b$. Nós queremos achar o caminho $y(x)$, tal que a integral de linha I da função F entre $x = a$ e $x = b$,

$$I = \int_a^b F(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, x)\, dx\,, \tag{3.2}$$

possua um valor estacionário relativo a caminhos infinitesimalmente próximos da função correta $y(x)$ (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002).

Barcelos Neto (2013) ressalta que, em (3.2), I não depende da variável de integração x, mas sim do tipo de função $y(x)$ que está sendo considerada. Para cada $y(x)$ a integral assumirá um certo valor. Devido a essa dependência, representamos I por

$$I = I[y]\,,$$

e dizemos que I é um funcional de y.

Barcelos Neto (2013) nos diz que, procurar este valor estacionário em I é o mesmo que procurar uma função $y(x)$ que passa pelos pontos A e B, localizados em $x = a$ e $x = b$ respectivamente, para a qual I é extremo. No cálculo diferencial, quando queremos obter o extremo de uma função $f(x)$, damos um acréscimo infinitesimal à variável e procuramos qual x que fornece

$$df = f(x + dx) - f(x) = 0\,. \tag{3.3}$$

Para o funcional $I = I[y]$, no lugar desse acréscimo infinitesimal, consideramos um 'deslocamento virtual' $\delta y(x)$ no caminho $y(x)$, e procuramos pela correspondente variação δI (BARCELOS NETO, 2013). O deslocamento virtual $\delta y(x)$ é um deslocamento infinitesimal que leva de uma curva $y(x)$ a uma outra curva possível $y(x) + \delta y(x)$ infinitesimalmente próxima, com x fixo (LEMOS, 2007). Para simplificar a nossa análise, vamos considerar que o funcional I depende apenas de $y(x)$, $y'(x)$ e x. Assim, em analogia com (3.3), temos

$$\delta I = I[y + \delta y,\, y' + \delta y'] - I[y] = 0\,, \tag{3.4}$$

onde estamos utilizando δ para indicar 'variação'. Esse operador δ é, para o cálculo variacional, equivalente ao que o operador d é para o cálculo diferencial.

Utilizando (3.2), temos

$$\delta I = \int_a^b F(y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x), x)\, dx - \int_a^b F(y(x), y'(x), x)\, dx\,. \tag{3.5}$$

Como $F(y(x), y'(x), x)$ é uma função usual,

$$F(y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x), x) = F(y(x), y'(x), x) + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'\,. \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) em (3.5), temos

$$\delta I = \int_a^b \left[F(y(x), y'(x), x) + \frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y' \right] dx - \int_a^b F(y(x), y'(x), x)\, dx$$

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y' \right] dx$$

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta \frac{dy}{dx} \right] dx$$

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y \right) dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta\, dy\,. \tag{3.7}$$

Como δ é uma operação em que x não varia, δ e d são operadores totalmente independentes, assim

$$\delta\, dy = d\, \delta y\,. \tag{3.8}$$

Como os pontos A e B são comuns para todas os possíveis caminhos $y(x)$, $\delta y(x) = 0$ para $x = a$ e $x = b$. Tendo isso em mente e utilizando (3.8) em (3.7), temos

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y \right) dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} d\, \delta y$$

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y \right) dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y(x) \bigg|_a^b - \int_a^b \delta y\, d\, \frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y \right) dx - \int_a^b \left(\delta y\, \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx$$

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x)\, dx\,. \tag{3.9}$$

Nós podemos então aplicar em (3.9) o assim chamado ‘lema fundamental’ do cálculo variacional.

Lema 3.1. Seja M uma função de x, definida em um caminho $y = y(x)$, entre dois valores $x = x_1$ e $x = x_2$. Se

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\,\delta y(x)\,dx = 0\,, \tag{3.10}$$

para toda função arbitrária $\delta y(x)$ contínua mediante a segunda derivada, então $M(x)$ deve desaparecer identicamente no intervalo $[x_1, x_2]$.

Nós conseguimos imaginar uma função δy que é positiva na proximidade imediata de qualquer ponto escolhido no intervalo, e zero em qualquer outro lugar. Nesse caso, a equação (3.10) só é válida se $M(x)$ desaparecer nesses pontos escolhidos, logo, M precisa ser zero em todo o intervalo (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002). Pela equação (3.9) e pelo lema fundamental, podemos afirmar que I só será extremo, logo, terá valor estacionário, se

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,. \tag{3.11}$$

A equação (3.11), quando discutida em termos da lagrangiana e do princípio de mínima ação, é conhecida como equação de Euler-Lagrange. Iremos discutir essa equação sob esses termos na próxima seção.

3.2 A equação de Euler-Lagrange

Quando trazemos a discussão do cálculo variacional para os sistemas mecânicos, como foi feito por Lagrange, devemos lembrar que esses sistemas são sujeitos a vínculos, que são limitações às possíveis posições e velocidades das suas partículas. Essas restrições precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema, pois são limitações de ordem cinética. Vale lembrar que restrições de natureza dinâmica não são vínculos. Em certos sistemas, podemos expressar os vínculos por uma relação funcional exclusivamente entre as coordenadas, onde podemos envolver o tempo de modo explícito (LEMOS, 2007), ou seja

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M, t) = 0\,, \tag{3.12}$$

onde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M$ são coordenadas arbitrárias usadas para descrever a configuração do sistema. Vínculos que podem ser representados da forma (3.12) são chamados de vínculos holônomos.

Em sistemas com vínculos holônomos, podemos introduzir um certo número n de variáveis independentes, onde o vetor posição de cada partícula do sistema é determinado univocamente em cada instante pelos valores dessas variáveis. Os vínculos também são identicamente satisfeitos se forem expressos em termos dessas variáveis. Essas variáveis são chamadas de coordenadas generalizadas e são denotadas genericamente por $q_1, q_2, \ldots, q_n$. O número n de variáveis é chamado 'grau de liberdade do sistema', assim, segundo Lemos (2007), um sistema mecânico holônomo tem tantos graus de liberdade quantas sejam as coordenadas generalizadas necessárias e suficientes para especificar a sua configuração a cada instante.

Quando se descreve um sistema de partículas usando um conjunto de coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, a derivada em relação ao tempo $\dot{q}_k$, de uma coordenada q_k qualquer, é denominada velocidade generalizada associada a esta coordenada (SYMON, 1982).

Vamos agora considerar um sistema com n graus de liberdade. Sua configuração em um instante t_1 é dada pelas n coordenadas e n velocidades nesse instante. Podemos caracterizar esse sistema por certa função escalar L, chamada lagrangiana, que depende das coordenadas generalizadas e das velocidades generalizadas, podendo também depender do tempo,

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)\,, \tag{3.13}$$

ou, de forma mais compacta,

$$L = L(q, \dot{q}, t)\,. \tag{3.14}$$

Seja S um funcional, definido como a integral de linha da lagrangiana entre dois instantes quaisquer da evolução do sistema, ou seja,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt\,. \tag{3.15}$$

Esse funcional S é chamado de ação. O formalismo desenvolvido por Lagrange para a Mecânica tem como sua peça fundamental o princípio de Hamilton, ou princípio da mínima ação, que é definido por Goldstein, Poole e Safko (2002), da forma mostrada na definição 3.1.

Definição 3.1. O movimento de um sistema, de um instante t_1 até um instante t_2, é tal que a ação possui valor estacionário para o caminho atual do movimento.

Assim como foi feito na seção anterior, queremos achar o caminho $q(t)$, tal que (3.15) possua um valor estacionário relativo a caminhos infinitesimalmente próximos da função correta $q(t)$. Procurar esse valor estacionário em S, é o mesmo que procurar uma função $q(t)$, que leva do instante t_1 até o instante t_2, para a qual S é extremo. Assim como em (3.4), a ação vai ser um extremo quando

$$\delta S = S[q_i + \delta q_i,\, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i] - S[q_i] = 0\,, \tag{3.16}$$

onde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Realizando todo o processo apresentado na seção anterior, vamos chegar na relação (3.9) para S,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) \, dt \, . \tag{3.17}$$

Pela equação (3.17) e pelo lema fundamental do cálculo variacional, podemos afirmar que S só será extremo, logo, terá valor estacionário, se

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \, , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \, . \tag{3.18}$$

A equação (3.18) é a equação de Euler-Lagrange e ela nos dá a evolução temporal do sistema.

Agora que já estabelecemos as bases deste trabalho, no próximo capítulo, apresentaremos o desenvolvimento de uma equação de Euler-Lagrange fracional, utilizando as definições de derivada e integral fracional de Riemann-Liouville.

4 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE FRACIONAL

Segundo El-Nabulsi e Torres (2008), o cálculo fracional representa uma poderosa ferramenta em matemática aplicada para o estudo de diversos problemas de diferentes campos da ciência e engenharia. Vários campos de aplicação de derivadas e integrais fracionais já estão bem estabelecidos, mas existem alguns que ainda estão nos seus primórdios. El-Nabulsi e Torres (2008) citaram o estudo de problemas fracionais no cálculo variacional, e suas respectivas equações de Euler-Lagrange, como um exemplo de campo de estudo do cálculo fracional que apenas começou. Mais de uma década depois desse comentário, hoje encontramos diversos trabalhos nessa área do cálculo fracional, mas ainda continua sendo um objeto interessante de estudo.

Segundo Agrawal (2002), muitos sistemas físicos podem ser representados com maior precisão utilizando formulações com derivadas fracionais. Uma forma de obter essas formulações é por meio da minimização de certos funcionais, e isso pode ser feito por meio de um 'cálculo variacional fracional'.

Inspirados nos trabalhos de El-Nabulsi e Torres (2008), Muslih e Baleanu (2007) e Agrawal (2002), desenvolvemos uma equação de Euler-Lagrange fracional utilizando as definições de derivada e integral fracional de Riemann-Liouville apresentadas anteriormente. Nas seções que seguem, apresentaremos a equação de Euler-Lagrange fracional desenvolvida e aplicaremos ela para o oscilador harmônico simples.

4.1 Desenvolvimento

Como vimos no capítulo anterior, para chegarmos na equação de Euler-Lagrange, partimos do princípio de mínima ação. Para isso, vamos considerar uma ação da forma

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^b L\left(q,\, {}_aD_t^\beta q,\, {}_tD_b^\gamma q, \tau\right) (t-\tau)^{\mu-1}\, d\tau\,, \tag{4.1}$$

onde ${}_aD_t^\beta$ e ${}_tD_b^\gamma$ são as derivadas fracionais esquerda e direita de Riemann-Liouville, respectivamente, dadas por (2.18) e (2.19).

Como o nosso intuito é obter uma equação de Euler-Lagrange partindo da ação (4.1), vamos fazer todo o procedimento apresentado no capítulo anterior. Estamos procurando uma função q, que leva do instante a até o instante b, para a qual S é extremo. Assim como em (3.4) e (3.16), a ação (4.1) vai ser um extremo quando

$$\delta S = S\left[q+\delta q,\ {}_aD_t^{\beta}q+\delta\,{}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q+\delta\,{}_tD_b^{\gamma}q\right] - S\left[q,\ {}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q\right] = 0\,, \tag{4.2}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned}\delta S =& \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^b L\left(q+\delta q,\ {}_aD_t^{\beta}q+\delta\,{}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q+\delta\,{}_tD_b^{\gamma}q,\tau\right)(t-\tau)^{\mu-1}\,d\tau\ - \\ &- S\left[q,\ {}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q\right] = 0\,.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Semelhante ao que foi feito em (3.6), vamos escrever

$$\begin{aligned}&L\left(q+\delta q,\ {}_aD_t^{\beta}q+\delta\,{}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q+\delta\,{}_tD_b^{\gamma}q,\tau\right) = \\ &\quad L\left(q,\ {}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q,\tau\right)+\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\,{}_aD_t^{\beta}q}\delta\,{}_aD_t^{\beta}q+\frac{\partial L}{\partial\,{}_tD_b^{\gamma}q}\delta\,{}_tD_b^{\gamma}q\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) em (4.3), temos

$$\begin{aligned}\delta S =& - S\left[q,\ {}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q\right]+\Big\{S\left[q,\ {}_aD_t^{\beta}q,\ {}_tD_b^{\gamma}q\right]+ \\ &+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\,{}_aD_t^{\beta}q}\delta\,{}_aD_t^{\beta}q+\frac{\partial L}{\partial\,{}_tD_b^{\gamma}q}\delta\,{}_tD_b^{\gamma}q\right)(t-\tau)^{\mu-1}\,d\tau\Big\}\end{aligned}$$

$$\delta S = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\,{}_aD_t^{\beta}q}\delta\,{}_aD_t^{\beta}q+\frac{\partial L}{\partial\,{}_tD_b^{\gamma}q}\delta\,{}_tD_b^{\gamma}q\right)(t-\tau)^{\mu-1}\,d\tau\,. \tag{4.5}$$

Como a derivada fracional é uma operação que está sendo realizada em cima da variável temporal, e a operação δ é uma operação onde essa variável é mantida fixa, os operadores ${}_aD_t^{\beta}$ e δ são totalmente independentes, assim como ${}_tD_b^{\gamma}$ e δ, ou seja,

$$\begin{aligned}\delta\,{}_aD_t^{\beta}q &= {}_aD_t^{\beta}\,\delta q\,, \\ \delta\,{}_tD_b^{\gamma}q &= {}_tD_b^{\gamma}\,\delta q\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Assim, podemos reescrever (4.5) como

$$\delta S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial_a D_t^\beta q} \, {}_aD_t^\beta \, \delta q + \frac{\partial L}{\partial_t D_b^\gamma q} \, {}_tD_b^\gamma \, \delta q \right) (t-\tau)^{\mu-1} \, d\tau \, . \tag{4.7}$$

A equação (4.7) consiste em três integrais. Podemos utilizar a relação (2.29) para reescrever a segunda e a terceira integral como

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial_a D_t^\beta q} (t-\tau)^{\mu-1} \, {}_aD_t^\beta \, \delta q \, d\tau &= \int_a^b \delta q \, {}_tD_b^\beta \left[\frac{\partial L}{\partial_a D_t^\beta q} (t-\tau)^{\mu-1} \right] d\tau \, , \\ \int_a^b \frac{\partial L}{\partial_t D_b^\gamma q} (t-\tau)^{\mu-1} \, {}_tD_b^\gamma \, \delta q \, d\tau &= \int_a^b \delta q \, {}_aD_t^\gamma \left[\frac{\partial L}{\partial_t D_b^\gamma q} (t-\tau)^{\mu-1} \right] d\tau \, . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Assim, substituindo (4.8) em (4.7), temos

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} (t-\tau)^{\mu-1} + \, {}_tD_b^\beta \left[\frac{\partial L}{\partial_a D_t^\beta q} (t-\tau)^{\mu-1} \right] + \right. \\ & \left. + \, {}_aD_t^\gamma \left[\frac{\partial L}{\partial_t D_b^\gamma q} (t-\tau)^{\mu-1} \right] \right\} \delta q \, d\tau \, . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pela equação (4.9) e pelo lema fundamental do cálculo variacional, podemos afirmar que S só será extremo se

$$\frac{\partial L}{\partial q} (t-\tau)^{\mu-1} + \, {}_tD_b^\beta \left[\frac{\partial L}{\partial_a D_t^\beta q} (t-\tau)^{\mu-1} \right] + \, {}_aD_t^\gamma \left[\frac{\partial L}{\partial_t D_b^\gamma q} (t-\tau)^{\mu-1} \right] = 0 \, . \tag{4.10}$$

A equação (4.10) é a nossa equação de Euler-Lagrange fracional, o produto principal deste trabalho. Esta equação foi obtida partindo de uma ação fracional e utilizando os operadores derivada fracional de Riemann-Liouville na lagrangiana. Outros autores obtiveram resultados semelhantes partindo da mesma lagrangiana fracional, mas utilizando operadores derivada diferentes na lagrangiana.

4.2 Discussão

Tomando a equação (4.10), assumindo que a lagrangiana só depende de q e ${}_aD_t^\beta$, e assumindo $\beta = 1$, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial q} (t-\tau)^{\mu-1} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (t-\tau)^{\mu-1} \right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}(t-\tau)^{\mu-1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)(t-\tau)^{\mu-1} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(t-\tau)^{\mu-1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}(t-\tau)^{\mu-1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)(t-\tau)^{\mu-1} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\mu-1)(t-\tau)^{\mu-2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{(\mu-1)}{(t-\tau)}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \tag{4.11}$$

onde utilizamos (2.20) para $\beta = 1$.

El-Nabulsi e Torres (2007) chamam o termo à direita da igualdade, na equação (4.11), de "força de fricção decadente fracional". Este termo possui significado em sistemas clássicos, quânticos ou até mesmo relativísticos, sendo responsável por adicionar um coeficiente de amortecimento na equação dinâmica, dependente do tempo.

Todo o desenvolvimento feito nessa seção foi baseado no desenvolvimento de Muslih e Baleanu (2007) e de David e Valentim (2015). El-Nabulsi e Torres (2007) desenvolvem a sua equação de Euler-Lagrange fracional partindo da ação (4.1), porém utilizando outro operador derivada fracional na lagrangiana. Outra abordagem, partindo da mesma ação e considerando derivadas convencionais na lagrangiana, foi a de El-Nabulsi (2005). Todas as abordagens citadas chegam em equações parecidas, porém todas elas possuem um termo em comum,

$$\frac{(\mu-1)}{(t-\tau)}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \tag{4.12}$$

que, aparentemente, provém da escolha da ação (4.1).

El-Nabulsi e Torres (2007) descrevem e toda a sua abordagem de equação de Euler-Lagrange fracional em termos de duas variáveis temporais, o tempo intrínseco τ e o tempo do observador t. Em nossa abordagem, vamos tratar τ como um coeficiente, assim como foi feito por David e Valentim (2015).

O termo μ representa a parte fracional da equação (4.11). Muslih e Baleanu (2007) interpretam esse termo como a dimensão fracional do espaço, por isso eles chamam a sua equação de Euler-Lagrange de "equação de Euler-Lagrange fracional em um espaço fracional". Conforme mudamos o valor de μ na equação, vamos obter soluções que destoam da solução clássica, que é obtida quando $\mu = 1$.

Na próxima seção, vamos analisar a aplicação da equação (4.10) para um oscilador harmônico simples, e observar como os termos que surgem da parte fracional da equação alteram o comportamento da solução original.

4.3 Aplicação no oscilador harmônico simples

Para aplicarmos a equação (4.10) no caso escolhido, vamos fazer uma alteração na lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\,, \tag{4.13}$$

do oscilador harmônico simples.

Vamos considerar que, no lugar da derivada temporal, temos uma derivada do tipo (2.18). Assim, temos a 'lagrangiana fracional do oscilador harmônico simples',

$$L = \frac{1}{2}m\left({}_aD_t^\beta x\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{4.14}$$

No caso do oscilador harmônico simples, as coordenadas generalizadas dão lugar à variável x. Assim, calculamos as derivadas que iremos utilizar na equação de Euler-Lagrange considerando $q = x$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}m\left({}_aD_t^\beta x\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2\right] = -kx\,, \\ \frac{\partial L}{\partial\, {}_aD_t^\beta x} &= \frac{\partial}{\partial\, {}_aD_t^\beta x}\left[\frac{1}{2}m\left({}_aD_t^\beta x\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2\right] = m\, {}_aD_t^\beta x\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Substituindo as derivadas (4.15) na nossa equação de Euler-Lagrange fracional (4.10), temos

$$-kx(t-\tau)^{\mu-1} + {}_tD_b^\beta\left[m\, {}_aD_t^\beta x\,(t-\tau)^{\mu-1}\right] = 0\,. \tag{4.16}$$

A equação (4.16) é a equação de Euler-Lagrange fracional do oscilador harmônico simples. Ao obtermos uma solução para essa equação, estaremos obtendo uma 'equação de movimento fracional' para o oscilador harmônico simples.

Equações diferenciais que possuem derivadas fracionais precisam de métodos mais complexos para serem resolvidas. A fim de facilitar a análise da solução (4.16), vamos considerar que suas derivadas são de ordem inteira, mais especificamente, de ordem $\beta = 1$. Assim, utilizando (2.20), vamos reescrever a equação (4.16) como

$$-kx(t-\tau)^{\mu-1} + \left(-\frac{d}{dt}\right)\left[m\dot{x}(t-\tau)^{\mu-1}\right] = 0$$

$$-kx(t-\tau)^{\mu-1} - m\left(\frac{d}{dt}\dot{x}\right)(t-\tau)^{\mu-1} - m\dot{x}\left[\frac{d}{dt}(t-\tau)^{\mu-1}\right] = 0$$

$$kx(t-\tau)^{\mu-1} + m\ddot{x}(t-\tau)^{\mu-1} + m\dot{x}\left[(\mu-1)(t-\tau)^{\mu-2}\right] = 0$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{\mu-1}{t-\tau}\right)\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{4.17}$$

Utilizando recursos computacionais, obtivemos

$$x(t) = C_1(t-\tau)^{\frac{1}{2}\mu}\, J_{\frac{1}{2}\mu}(t-\tau) + C_2(t-\tau)^{\frac{1}{2}\mu}\, Y_{\frac{1}{2}\mu}(t-\tau)\,, \tag{4.18}$$

como solução para a equação diferencial (4.17).

As funções J e Y são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Essas funções são definidas por Arfken, Weber e Harris (2017), conforme mostrado nas definições 4.1 e 4.2.

Definição 4.1. A função

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s} \qquad \nu \in \mathbb{R} \quad \nu \neq -1, -1, \ldots\,,$$

é uma solução para a EDO de Bessel, e é chamada de função de Bessel de primeiro tipo.

Definição 4.2. A função

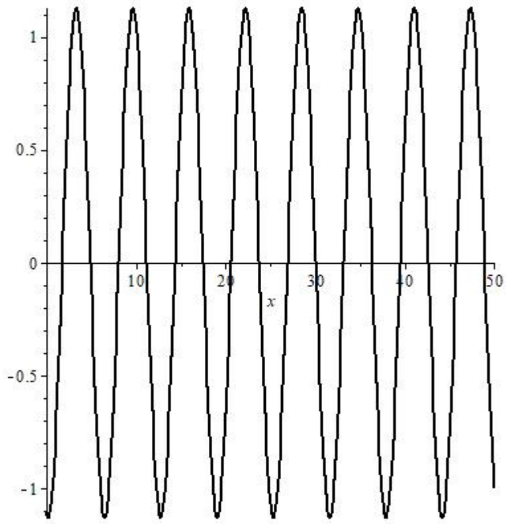
$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}\,,$$

é uma solução para a EDO de Bessel, e é chamada de função de Bessel de segundo tipo.

Para observarmos com maior clareza o comportamento da solução (4.18), decidimos analisar o seu gráfico para diferentes valores de μ e τ. Para essa análise, vamos considerar $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$. Nessas condições, quando fazemos $\mu = 1$ e $\tau = 1$, temos como resposta o gráfico 4.1, que é o gráfico do oscilador harmônico simples. Vamos utilizar este gráfico como uma base, para observarmos como os termos μ e τ alteram a solução original do oscilador harmônico.

Mantendo $\tau = 1$ e tomando $\mu = 0.9$ na equação (4.18), obtemos o gráfico 4.2 para a solução. Podemos observar que o gráfico começa a apresentar diferenças pequenas, se comparado com

Gráfico 4.1: $\mu = 1$ e $\tau = 1$

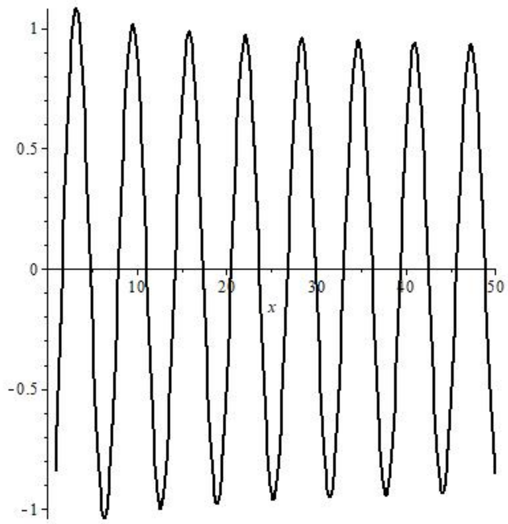


Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

o gráfico 4.1.

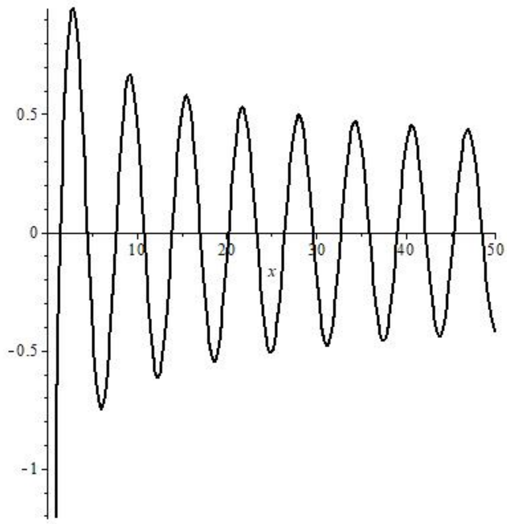
Para obter um resultado mais significativo, tomamos $\mu = 0.5$ na equação (4.18), ainda mantendo $\tau = 1$. Nessas condições, obtemos o gráfico 4.3. Aqui já podemos observar que, quando estamos considerando valores de μ menores que um, a nossa solução passa a se comportar como uma oscilação amortecida. Vale lembrar que μ adota apenas valores positivos.

Gráfico 4.2: $\mu = 0.9$ e $\tau = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Gráfico 4.3: $\mu = 0.5$ e $\tau = 1$

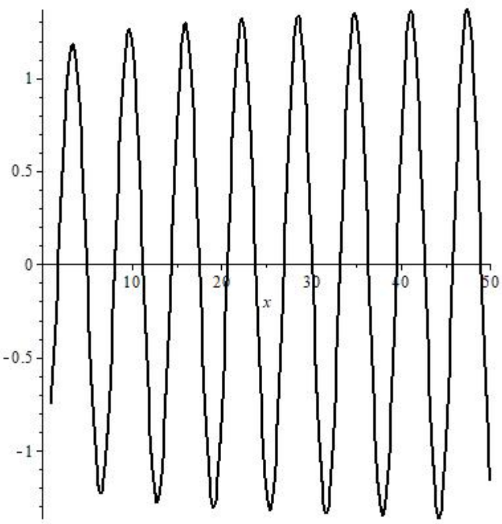


Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Agora que vimos o comportamento da solução (4.18) para $\mu < 1$, vamos observar como ela se comporta para valores de μ maiores que um. Mantendo $\tau = 1$ e tomando $\mu = 1.1$, obtemos o gráfico 4.4, onde começamos a observar o comportamento da solução para $\mu > 1$.

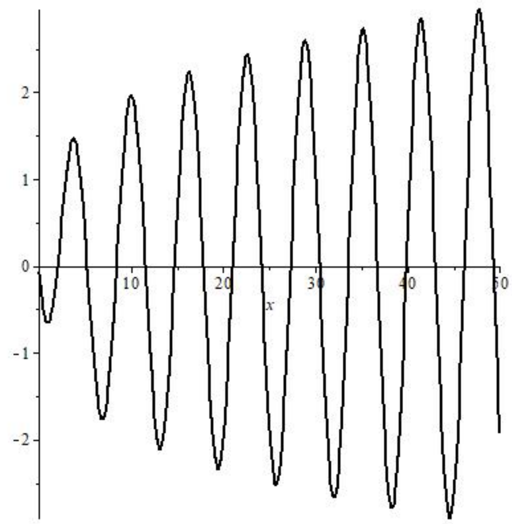
Semelhante ao que fizemos para $\mu < 1$, tomamos $\mu = 1.5$, mantendo $\tau = 1$, para obter um resultado mais significativo. Nessas condições, obtemos o gráfico 4.5. Comparando o gráfico obtido com o grafico 4.1, vemos que, para valores de μ maiores que um, a nossa solução começa a se comportar como se a amplitude da oscilação estivesse aumentando, que é o comportamento oposto ao observado para valores de μ entre zero e um.

Gráfico 4.4: $\mu = 1.1$ e $\tau = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

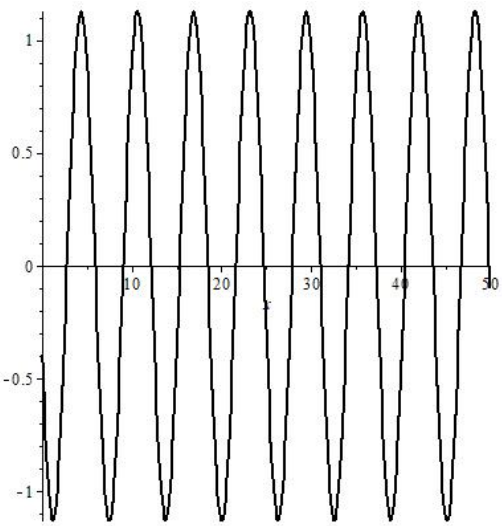
Gráfico 4.5: $\mu = 1.5$ e $\tau = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

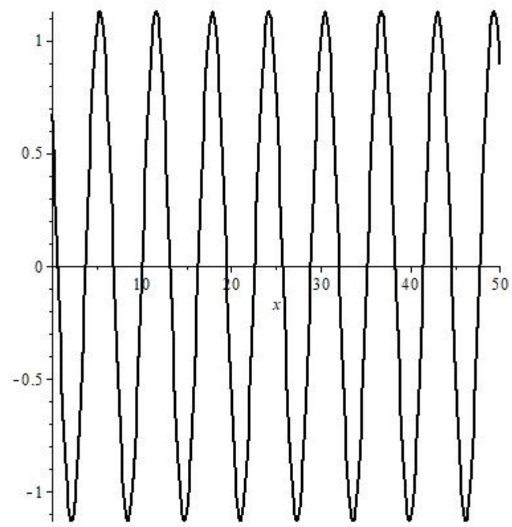
Agora que vimos o comportamento da solução (4.18) para diferentes valores de μ, vamos observar como os valores de τ alteram a solução. Para isso, vamos fixar $\mu = 1$. Para $\tau = 1$ obtemos o gráfico 4.1, para $\tau = 2$ obtemos o gráfico 4.6 e para $\tau = 3$ obtemos o gráfico 4.7. Analisando esses três gráfico, vemos que a amplitude da oscilação não é alterada, porém é possível perceber que a oscilação sofre um 'deslocamento' no eixo horizontal. A escolha dos valores de τ foi feita para que esse 'deslocamento' fosse mais evidente.

Gráfico 4.6: $\mu = 1$ e $\tau = 2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Gráfico 4.7: $\mu = 1$ e $\tau = 3$



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Observando todos os gráficos apresentados, vemos que o termo μ, quando possui valor menor que um, acrescenta à solução do oscilador harmônico uma característica dissipativa. Fisicamente, essa característica dissipativa surge de uma perda de energia por parte do sistema. Considerando a discussão apresentada por Muslih e Baleanu (2007), onde eles tratam o termo μ como a dimensão fracional do espaço, podemos considerar que espaços de dimensão fracional entre zero e um, retiram energia do sistema. Da mesma forma, para valores de μ maiores que um, podemos considerar que espaços de dimensão fracional maiores que um, oferecem energia ao sistema.

Fazendo uma análise para τ, vemos que esse termo trabalha na solução como uma 'constante de fase'.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho pretendeu elaborar uma equação de Euler-Lagrange fracional utilizando as definições de derivada e integral fracional de Riemann-Liouville. Como foi observado no capítulo quatro, a utilização da abordagem de Riemann-Liouville para o cálculo de ordem não-inteira, e o cálculo variacional, produziram uma equação de Euler-Lagrange que, quando abordada em termos das derivadas convencionais, produz uma equação de Euler-Lagrange com um termo dissipativo. A equação obtida se assemelha à obtida por outros autores, que construíram suas equações utilizando outras abordagens.

A partir da análise feita para o oscilador harmônico simples, vimos que o termo de dissipação que surge da equação de Euler-Lagrange elaborada possui comportamento dissipativo, para valores de μ entre zero e um. Para $\mu > 1$ pudemos observar que a solução obtida passa a 'ganhar' energia. Além disso, vimos que a utilização da nossa equação de Euler-Lagrange fracional no oscilador harmônico simples também resulta no surgimento de um termo τ na solução, que se comporta como uma 'constante de fase'.

Em pesquisas futuras, pode-se estudar de forma mais profunda esse ganho e perda de energia, que surge do termo μ, e também uma descrição física para o termo τ. Também pode-se refazer todo o processo de construção da equação de Euler-Lagrange fracional, apresentado neste trabalho, para outras abordagens de cálculo fracional, como a abordagem de Grunwald-Letnikov, ou Caputo.

6 REFERÊNCIAS

AGRAWAL, O. P. Formulation of euler–lagrange equations for fractional variational problems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 272, n. 1, p. 368–379, 2002.

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. **Física matemática**: métodos matemáticos para engenharia e física. 7. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.

BARCELOS NETO, J. **Mecânicas newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

BUTZER, P. L.; WESTPHAL, U. An introduction to fractional calculus. In: HILFER, R. (Ed.). **Applications of fractional calculus in physics**. [S.l.]: World scientific, 2000. p. 1–86.

DAVID, S. A.; LINARES, J. L.; PALLONE, E. M. J. A. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 33, p. 4302–4302, 2011.

DAVID, S. A.; VALENTIM, C. A. Fractional euler-lagrange equations applied to oscillatory systems. **Mathematics**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 3, n. 2, p. 258–272, 2015.

EL-NABULSI, R. A. A fractional approach to non-conservative lagrangian dynamical systems. **FIZIKA: A**, v. 14, n. 4, p. 289–298, 2005.

EL-NABULSI, R. A.; TORRES, D. F. Necessary optimality conditions for fractional action-like integrals of variational calculus with riemann–liouville derivatives of order (α, β). **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Wiley Online Library, v. 30, n. 15, p. 1931–1939, 2007.

EL-NABULSI, R. A.; TORRES, D. F. Fractional actionlike variational problems. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 49, n. 5, p. 053521, 2008.

FULINI, M. A. **História do cálculo diferencial e integral**. 56 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Núcleo de Educação á Distância, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2017.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. 3. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2002.

GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional calculus. In: CARPINTERI, A.; MAINARDI, F. (Ed.). **Fractals and fractional calculus in continuum mechanics**. New York: Springer-Verlag Wien, 1997. p. 223–276.

LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

LOVERRO, A. Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer. **Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering**, p. 1–28, 2004.

MILLER, K. S.; ROSS, B. **An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993. v. 1.

MUSLIH, S. I.; BALEANU, D. Fractional euler—lagrange equations of motion in fractional space. **Journal of Vibration and Control**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 13, n. 9-10, p. 1209–1216, 2007.

PETROVAI, D. M. An important lebesgue non-measurable function. **Procedia Manufacturing**, Elsevier, v. 46, p. 570–572, 2020.

SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. **Fractional integral and derivatives**: theory and applications. [S.l.]: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campus, 1982.