



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**MONIK PORTO DE MORAES**

**A VISUALIZAÇÃO E O ESPAÇO GEOMÉTRICO: UMA BREVE DISCUSSÃO**  
**TEÓRICA SOBRE UMA RELAÇÃO NÃO TRIVIAL**

**SEROPÉDICA**

**2020**



**MONIK PORTO DE MORAES**

**A VISUALIZAÇÃO E O ESPAÇO GEOMÉTRICO: UMA BREVE DISCUSSÃO  
TEÓRICA UMA RELAÇÃO NÃO TRIVIAL**

Monografia Apresentada à Banca Examinadora da UFRRJ, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática na modalidade de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do professor Renato Machado Aquino.

SEROPÉDICA

2020

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM**  
**MATEMÁTICA.**

A monografia “A VISUALIZAÇÃO E O ESPAÇO GEOMÉTRICO: UMA BREVE DISCUSSÃO TEÓRICA SOBRE UMA RELAÇÃO NÃO TRIVIAL”, apresentada e defendida por MONIK PORTO DE MORAES, matrícula 200719019-0 foi aprovada pela Banca Examinadora, com conceito “S” recebendo o número 732.


Seropédica, 03 de fevereiro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. Renato Machado Aquino

**Orientador**

  
Prof. Dr. Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela

  
Prof. Dr. Pedro Carlos Pereira

SEROPÉDICA  
2020

*À minha mãe.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus, sem Ele nada disso seria possível. Agradeço minha mãe Leda e ao Nildo por toda paciência e apoio nessa minha jornada tão tumultuada. Agradeço a toda influência que eu tive ao longo de toda minha vida escolar até a universidade, e também a todos aqueles que me acompanharam e que, direta ou indiretamente, me apoiaram e influenciaram todos estes anos. Por último, mas não menos importante, agradeço imensamente ao meu orientador por toda sua disponibilidade, paciência e orientação, claro, no decorrer deste trabalho.

Muito Obrigada!

## RESUMO

Este trabalho aborda o conceito de visualização sobre várias óticas, inclusive a do ensino-aprendizagem da geometria espacial. Para tanto, se faz uso da teoria de construção do conhecimento de Piaget, especificando-o para matemática e particularizando-o para a Geometria. Após fazer um breve levantamento sobre as dificuldades de alunos e professores em pesquisas desenvolvidas que abordam o ensino e aprendizagem de Geometria, observa-se a necessidade de um ensino voltado para educação visual, onde o papel da visualização vai para além do ensino de geometria ou matemática. A partir da construção de um diálogo entre o conceito psicológico de visualização com o modelo de Van Hiele, são tratadas as definições da teoria de Gutiérrez (1997).

Palavras-Chave: visualização; geometria espacial; educação visual; Modelo de Van Hiele.

## Sumário

|  |    |
|--|----|
| INTRODUÇÃO.....                                    | 8  |
| 1. Visualizando o Trabalho.....                    | 10 |
| 1.1 – Hipótese do Trabalho.....                    | 11 |
| 1.2 – Objetivo Geral .....                         | 11 |
| 1.3 – Objetivos Específicos .....                  | 11 |
| 1.4 – Tema da Pesquisa .....                       | 11 |
| 1.5 – Natureza da Pesquisa.....                    | 12 |
| 1.6 – Organização dos Capítulos .....              | 12 |
| 2. Descobrimo a Visualização .....                 | 13 |
| 2.1 - O que é visualização?.....                   | 13 |
| 2.2 - Como ocorre a formação da visualização?..... | 13 |
| 2.2.1 – Construindo o conhecimento .....           | 14 |
| 2.2.2 – Visualizando .....                         | 15 |
| 2.3 – Visualizando a Matemática .....              | 16 |
| 3. Entendendo a visualização.....                  | 20 |
| 3.1 – Visualizando a geometria .....               | 20 |
| 3.2 – Visualizando as dificuldades .....           | 23 |
| 3.3 – Educação Visual .....                        | 27 |
| 3.3.1 – Interagindo.....                           | 28 |
| 3.3.2 – Fundamentando Teorias .....                | 28 |
| 3.3.3 – Abstraindo .....                           | 28 |
| 4. A visualização.....                             | 30 |
| 4.1 – A Psicologia da visualização .....           | 31 |
| 4.2 – Dialogando com os Van Hiele.....             | 33 |
| 4.2.1 – Os Níveis de Pensamentos.....              | 34 |
| 4.2.2 – As Fases de Aprendizagem.....              | 35 |
| 4.3 – A Teoria de visualização de Gutiérrez .....  | 36 |
| 4.3.1 – Definindo conceitos.....                   | 36 |
| 4.3.2 – A teorizando a visualização .....          | 38 |
| Minha Visualização .....                           | 40 |
| Bibliografia.....                                  | 42 |

## INTRODUÇÃO

*“o campo da visualização é tão amplo e diverso que não é razoável tentar abranger todo ele”.* (Gutiérrez, 1997, p. 4, tradução nossa)

Ao longo de toda minha infância sempre tive uma certeza: eu queria ser professora. Em várias situações, eu me percebia uma ponte entre um professor e alguns colegas de estudo. Em todos os meus anos escolares, eu era a pessoa que meus colegas procuravam para estudar matemática ou tirar qualquer dúvida em alguma questão de trabalho ou em estudos para provas, claro que nem sempre eu sabia a resposta, mas eu fazia o que podia. De certa forma eles foram meus primeiros alunos. E no decorrer do Ensino Fundamental, eu me encontrei com outra certeza: queria fazer matemática. E então veio a universidade...

Foi na universidade que eu percebi na geometria minha maior afinidade, e foi numa aula de Lema 3, quando o professor nos ensinava meios práticos e manuais de provar certas “fórmulas” geométricas, que eu me percebi bastante interessada em todos aqueles porquês e como e “uaus” que poderiam ser apresentados em uma sala de aula, sem grandes mistérios ou sofisticações. E então, naquele momento, eu decidi que era sobre isso que eu queria me especializar: geometria. Mais ainda: geometria espacial. Juntamente a isso, em meio a todas aquelas matérias do Instituto de Educação, com todas aquelas questões sobre didática, psicologias e afins, que eu notei que na matemática algumas questões eram diferentes das demais disciplinas, especialmente na matemática mais abstrata. E foi quando se falava sobre técnicas de ensino, métodos de abordagem e o que se pensa como aprendizagem em cada disciplina que surgiu o tal do pensamento matemático e juntamente a ele veio a visualização matemática, que é algo bem teórico e abstrato, e que me trouxe um monte de outros “uaus”. Então, percebi que quando se falava em geometria espacial e visualização no mesmo contexto, surgia um outro campo de estudo que era bastante interessante a meu ver.

Quando surgiu a época da monografia, eu já sabia o tema: visualização no ensino-aprendizagem da geometria espacial. Após feita uma pesquisa para



execução de um trabalho em geometria tridimensional, e que, a princípio, não utilizasse algum tipo de software, me deparei com a falta de referencial teórico para o mesmo. Decidindo compreender um pouco mais sobre o problema, deparei-me com uma certa escassez de pesquisas que teorizassem sobre a construção da visualização dentro dos espaços de ensino-aprendizagem de geometria espacial. Por isso, resolvi realizar um trabalho de cunho teórico, onde fossem apresentados pesquisas de autores que já teorizam e praticam a construção do conceito de visualização dentro de um ambiente de ensino-aprendizagem (seja no Ensino Fundamental, Médio ou Superior), onde é estabelecida a construção de tal conhecimento, e como o mesmo influencia na aprendizagem dos estudantes.

Ao longo da execução deste trabalho também me deparei com uma enorme quantidade de outras formas de visualização em outras áreas (que aqui não são exploradas) e o tamanho da importância que a visualização carrega sobre si, dentro de cada área. Por exemplo, como explicar a estrutura de uma construção para um engenheiro civil ou arquiteto, sem visualização? Ou a estrutura de um composto orgânico ou fórmula para um químico? Ou uma equação de onda para um físico?

Foi pensando nisso que surgiu este trabalho, construído a partir de referenciais do campo pedagógico, psicológico e do campo da educação matemática que aborda a visualização de forma central, particularizando o tema para o contexto da matemática no ensino-aprendizagem de geometria espacial.

## 1. Visualizando o Trabalho

Há quase que um consenso sobre a importância do estudo da geometria na formação de habilidades importantes para a compreensão de conceitos de diversos campos, o desenvolvimento do pensamento e sua expressão, além do entendimento do mundo a nossa volta. Tal importância é reforçada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio quando estabelecem que:

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2006, p.75)

No que diz respeito à Geometria Espacial, era de se esperar fosse dado especial destaque ao desenvolvimento de habilidades de visualização. Esse trabalho ligado à visualização, poderia ajudar os alunos a compreenderem aspectos importantes da geometria elencados nos PCN+ (BRASIL, 2006a, p. 123): compreensão da posição relativa de objetos geométricos assim como as diferentes formas que os compõe. Poderia auxiliar o estudante também na construção de modelos que o ajudariam a resolver problemas ligados à matemática e, também, a outras disciplinas. No entanto, a sala de aula real nos mostra que o trabalho com a geometria espacial fica, em geral, reduzida à memorização de fórmulas. Mais ainda, muitas vezes os estudantes não conseguem relacionar conceitos, identificar elementos dos sólidos ou mesmo relacionar sólidos entre si. Essas deficiências são atribuídas à má formação do aluno em geometria plana ou mesmo à deficiência na formação do professor. (COSTA, BERMEJO, MORAIS, p. 2)

Com essa motivação, esta pesquisa foi estruturada da seguinte forma:

## 1.1 – Hipótese do Trabalho

A visualização é de fundamental importância para o ensino-aprendizagem de geometria. E mais ainda de geometria espacial.

## 1.2 – Objetivo Geral

Compreender a visualização sob vários pontos de vista, tendo como foco sua importância para o desenvolvimento de habilidades ligadas a várias áreas do conhecimento e, em particular, do conhecimento matemático.

## 1.3 – Objetivos Específicos

1. Conceituar o que é visualização.
2. Investigar as origens psicogenéticas da visualização.
3. Fazer um breve levantamento das pesquisas relacionadas à visualização.
4. Compreender a importância da visualização para o ensino aprendizagem de diversas áreas da matemática, em particular da Geometria.
5. Relacionar níveis de pensamento geométrico com níveis de pensamento visual.

## 1.4 – Tema da Pesquisa

É quase senso comum que visualizar é essencial para o ensino-aprendizagem de geometria espacial. No entanto, a minha experiência enquanto estudante de geometria tanto no ensino médio quanto na universidade mostra que pouca ou nenhuma atenção é dada a visualização. Pressupõe-se que o visualizar seja uma habilidade nata ou adquirida automaticamente ao longo da vida, como se não fosse necessária uma formação para o desenvolvimento apropriado desta.

Acreditamos que um dos pontos chave para a dificuldade encontrada no ensino-aprendizagem da Geometria seja exatamente a falta de um trabalho pedagógico prévio ligado à visualização, Em outras palavras, talvez fosse

necessária toda uma metodologia que se iniciasse no período infantil, e ao longo do desenvolvimento escolar, permitisse que a criança desenvolvesse o pensamento visual.

## 1.5 – Natureza da Pesquisa

A pesquisa desenvolvida é de natureza teórica, tendo como foco a compreensão da noção de visualização e suas implicações. Para tanto foi realizada uma revisão bibliográfica em artigos de periódicos, capítulos de livros e anais de congressos, sendo principal deles o encontro anual de “Psicologia da educação matemática” (PME)<sup>1</sup>.

## 1.6 – Organização dos Capítulos

No segundo capítulo do trabalho falaremos sobre como ocorre a construção e armazenamento de todo e qualquer saber que adquirimos durante cada experiência vivida, começando pela apresentação da construção do conhecimento em sua forma mais ampla, segundo a visão de Piaget, e estreitando para a construção do saber matemático.

O terceiro capítulo será focado em como ocorre a construção da geometria, particularmente a visualização, e levando em conta as muitas as dificuldades que são apresentadas ao longo de todo e qualquer processo de ensino-aprendizagem. Também será visto aqui a importância da educação visual e como ela funciona.

No quarto e último capítulo, será apresentado o cognitivo da visualização dialogando com a metodologia proposta por Van Hiele e complementando com os conceitos definidos por Gutiérrez, que vem a ser parte fundamental neste trabalho, com sua criação de uma proposta para a compreensão do ensino-aprendizagem em visualização de geometria espacial.

---

<sup>1</sup> *Psychology of Mathematics Education*

## 2. Descobrimos a Visualização

### 2.1 - O que é visualização?

De acordo com a definição encontrada no Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa, visualização é: “1- Ato ou efeito de visualizar; 2- Imagem formada na mente ou a que resulta desse processo; visualidade; 3- Ato de transformar em imagem mental conceitos abstratos; 4- Percepção nítida de algo. (da etimologia: *visualizar+ação*).” (Melhoramentos, 2019). Observe que visualizar significa “formar uma imagem mental do que não existe.”<sup>2</sup> (Melhoramentos, 2019).

A partir daqui, temos duas definições que possuem como base apenas o processo de construção mental de um indivíduo, ou seja, a visualização depende majoritariamente do processo de formação e construção do conhecimento na mente humana.

### 2.2 - Como ocorre a formação da visualização?

Para falarmos de construção da visualização, primeiramente precisamos entender o processo de formação do conhecimento de forma geral, aqui referimos a todo e qualquer processo de construção mental, seja ela didática ou não. Utilizando a definição trazida em Montoito & Leivas (2012) que descrevem os estudos de Piaget sobre a construção do conhecimento na mente humana, baseado na evolução da inteligência humana através da biologia, da lógica e da epistemologia genética: “Piaget não realizou seus estudos considerando a educação propriamente dita, mas sim o desenvolvimento mental, bem como as estruturas lógicas da formação da inteligência e do conhecimento.” (p. 22).

---

<sup>2</sup> Aqui faço uso da distinta tradução relativa das palavras inglesas ‘visualizing’ e ‘seeing’. No português ambas palavras possuem o mesmo sentido: visualização. No inglês, visualizing possui sentido de imaginar e seeing, o sentido de ver. Assim, quando faço uso de “formar uma imagem mental do que não existe”, me refiro aquilo que ainda não foi apresentado concretamente ao aluno. Por exemplo, antes de apresentar qualquer tipo de poliedro, peça para um aluno imaginar um sólido que possui 20 faces triangulares e que pode ser inscrito em uma esfera. Observe que depois que lhe é apresentado tal sólido em material concreto, a imagem mental do icosaedro deixa de ser imaginação e passa a ser uma representação mental do icosaedro já visto, mesmo que não seja exata.

Neste texto, faremos uso das concepções e teorias de Piaget sobre a formação do conhecimento inteligível no ser humano.

### 2.2.1 – Construindo o conhecimento

Para Piaget a criança constrói o conhecimento por meio da experiência física, através do tato e da observação, conforme manipula os objetos ao seu redor. Para explicar como se dá esse conhecimento, Piaget o divide em processos complementares de assimilação, acomodação, adaptação, organização e equilíbrio.

A assimilação é um fator que consiste ao sujeito, pois é o processo de compreensão de algo. Utiliza o conhecimento prévio que tem sobre o assunto. A acomodação é a superação por esforço cognitivo próprio. Adaptar é assimilar e acomodar um determinado conhecimento simultâneo. A totalidade desse processo é a organização da estrutura mental. A equilíbrio cognitiva é o autorregular do pensamento. (DE SOUZA, 2010, apud MONTOITO & LEIVAS, 2012, p. 23)

Há ainda o pensamento reversível, onde o conhecimento torna-se dinâmico, ou seja, o indivíduo expressa sua capacidade de construir, desconstruir e reconstruir aquilo que foi aprendido. Este processo une-se a outros conhecimentos, desdobrando-se em partes e transformando e/ou corrigindo outros conhecimentos adquiridos.

A teoria de Piaget possui ainda três outros aspectos fundamentais:

1. Conteúdo: que diz respeito aos dados comportamentais da forma de pensar;
2. Estrutura: que organiza e explora o desenvolvimento da inteligência;
3. Função: que está ligada a adaptação mental.

Esta teoria também se divide em três períodos (pode haver discrepâncias nas idades informadas, pois cada ser é único):

1. 0 a 2 anos: inteligência sensório-motora, onde desenvolve-se noções de objeto, espaço, casualidade e tempo;
2. 2 a 11 anos: Preparação e organização das operações concretas:
  - a. 2 a 7 anos: pré-operacional, onde a inteligência faz uso da imitação para a representação, aqui a criança adquire a linguagem, embora ainda não possua algum valor conceitual para si. A partir dos 5 anos a imitação evolui, desenvolve-se o intuitivo que leva a criança a generalidade;
  - b. 7 a 11 anos: operações concretas, onde adquire-se as noções de distância, comprimento, peso, área, volume etc. Também se obtém a capacidade de reversibilidade, ou seja, representação de uma ação e de sua ação inversa.
3. 11 a 15 anos: operações formais, onde obtém-se um raciocínio hipotético e dedutivo, não necessitando de manipulações reais e/ou físicas para criar argumentos conclusivos. A partir daqui as estruturas operatórias formais se tornam ponto de partida para as estruturas lógico-matemáticas que continuam a mudar e reorganizar todo o conhecimento.

### 2.2.2 – Visualizando

O primeiro espaço vivenciado pela criança é o corpo, depois ela vai interagir com outros corpos/objetos, adquirindo uma noção de espaço em perspectiva. “Para Piaget e Inhelder (1993) as relações topológicas vêm em primeiro lugar, seguidas das relações projetivas e euclidianas[...]” (Montoito & Leivas, 2012, p. 25).

As relações topológicas dizem respeito aos objetos em si, suas relações de vizinhança, separação, envolvimento, continuidade e ordem (perceptiva e representativa). Nessa fase, o sujeito reconhece, através do tato, a maior parte dos objetos usuais, mas não consegue reconstruir as figuras geométricas em suas mentes. As relações euclidianas surgem quando da construção informal do conceito de medida, que gera a noção de distância. Aqui, adquire-se a noção de projeção, visualizando o espaço no plano. Já nas relações projetivas, os objetos são coordenados entre si. Nessa fase, é possível que a abstração comece a se

manifestar. Colocando de outra forma, noções perceptivas são o ponto de partida, só muito depois aparecem as noções de linguagem e representação. Observe que, em geral, as relações que determinam reta, ângulo e coordenadas não são vistas na construção do conceito geométrico. Tais noções geométricas desenvolvem-se gradativamente e, como em todos os outros tipos de conhecimento, a noção do mundo auxilia em sua compreensão na medida que se forma.

### 2.3 – Visualizando a Matemática

A matemática, como criação humana e cultural, lida com objetos e entidades bem diferentes do mundo concreto. Ela se baseia, muito mais do que se permite admitir, na visualização em diferentes formas e em diferentes níveis, muito além do campo de visualização espacial e geométrica.

A definição de Zimmermann & Cunningham (1991) e Hershkowitz et al. (1989) propõe que: visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, da interpretação, do uso e da reflexão de figuras, imagens e/ou diagramas em nossas mentes, num papel ou em ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar a informação, pensando e desenvolvendo ideias anteriormente desconhecidas e avançando no aprendizado. (ARCAVI, 1999, p. 26, tradução nossa)

A visualização acompanha um desenvolvimento simbólico. Pode ser um fator essencial para criar o sentimento de autoconhecimento e imediaticidade. Ela é um meio viável para se resolver conflitos entre solução simbólica e intuição. Ela ilustra resultados e ajuda a interação (e recuperação) conceitual que possivelmente possa ter passado despercebida pela solução formal. Esse fenômeno é descrito como “*sequências visualmente moderadas (VMS)*” (Davis, 1984, apud Arcavi, 1999, p. 31, tradução nossa).

Nesse caso, visualização é uma ferramenta para desembaraçar-se das situações nas quais não se tem certeza de como proceder. [...] Em outras palavras, a visualização (v1) leva ao procedimento (p1) cuja



execução produz uma nova pista visual (v2) que leva a um novo procedimento (p2), e assim sucessivamente. (ARCAVI,1999, p. 31, tradução nossa).

A visualização pode ser, em cada caso particular, uma ajuda auxiliar para a resolução de problemas e, ainda, servir de inspiração para soluções criativas, tendo papel central para resoluções completas de problemas que vai além do processo mecânico. A visualização pode transformar-se numa solução geral formal através de um processo autoanalítico, ou seja, o mesmo objeto visual pode ter diferentes significados em contextos distintos.

Resumindo, percebemos que a visualização consiste num processo extremamente diferente de todos os outros tipos de aprendizagem (ou inteligência). Ela “não apenas organiza os dados em estruturas significativas como também é um fator importante de orientação do desenvolvimento analítico de uma solução” (Fischbein, 1987, apud Arcavi, 1999, p. 35, tradução nossa).

Para Arcavi (1999), parece haver um entendimento unificado sobre a visualização no aprendizado matemático. A visualização “não está relacionada como simples ilustrações, mas também é reconhecida como componente chave da compreensão, da resolução e, até mesmo, das provas dos problemas” (p. 37, tradução nossa). O mesmo autor classifica as dificuldades da visualização em três categorias (p. 38, tradução nossa):

1. Cultural: Refere-se aos valores e crenças sobre a diferença, o significado e o que é aceito e validado quando falamos em ‘o que é matemática’ e ‘o que é o fazer matemática’, seja na prática escolar ou acadêmica. Podendo levar a desvalorização da educação visual;
2. Cognitiva: certamente subjetiva, especialmente quando falamos de conceitos que requerem maior elaboração. A habilidade individual de conectar a imagem mental com sua representação analítica pode transformar qualquer situação em algo simplista ou elaborado em demasia;
3. Sociológica: inclui aquilo que chamamos de transposição didática, que nos diz o quanto é necessário adaptar um determinado conhecimento, seja ele acadêmico ou científico, para ser ensinado em determinado

ambiente. Neste processo o conhecimento pode ser linearizado, compartimentalizado e algoritmizado, podendo perder suas interconexões originais, dificultando o processo de visualização.

Há ainda uma dificuldade descrita por Chiappini & Bottino (1999) sobre a construção da imagem mental. Eles relatam que “objetos matemáticos são abstratos, não receptivos a qualquer imaginação ou manipulação concreta; eles são imateriais, não tangíveis e acessível apenas pelo pensamento.” (p.1, tradução nossa). Em seu texto eles destacam dois processos de transferência: o da estrutura matemática para a representação visual externa, que é bastante objetivo; e o da representação visual externa para a representação da imagem mental, que se torna de difícil análise, pois não temos acesso à mente alheia.

Na matemática da informação utilizamos do computador para suporte e interação na representação visual para auxiliar o desenvolvimento cognitivo, que permite ao aluno uma aproximação da reconstrução simbólica com a perspectiva motora, baseando-se na manipulação e interatividade do aluno com o software que permite possibilidades infinitas. Eles destacam ainda o fato de que esta passagem não é simples, nem automática ou sequer espontânea. Ela requer uma aproximação educacional viável para dar suporte a aquisição do método dedutivo. Falaremos deste assunto com mais detalhes no capítulo seguinte.

A sentença “Nós não sabemos o que vemos, vemos o que sabemos” aplica-se a muitas situações onde estudantes não necessariamente enxergam a mesma coisa que os professores. Em um dos exemplos utilizados por Arcavi (1999, p. 36), ele relata situações envolvendo estudantes não familiarizados com o conceito básico de funções. Em uma delas, gráficos matemáticos são julgados por “chutes” sem necessariamente basear-se num conceito pré-adquirido; num outro contexto não muito diferente, os estudantes, ao observarem um gráfico de funções lineares, percebem certa “irrelevâncias”, um conjunto de observações que passam (e permanecem) despercebidas por um *expert*, mas são (e devem ser) “exploradas” por olhos “destreinados”.

Observe a seguir outro exemplo do mesmo autor:

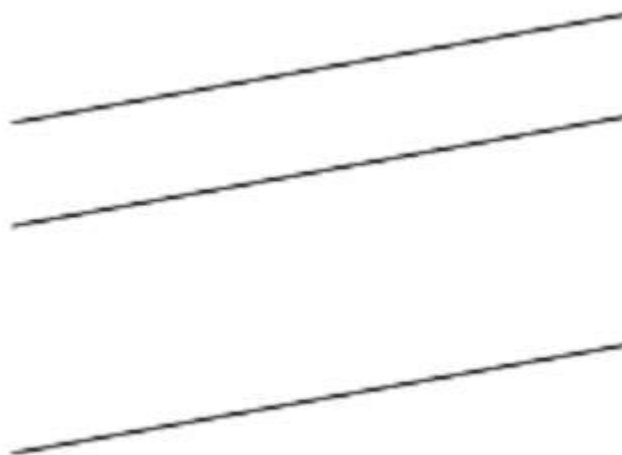


Figura 1: Reprodução: Arcavi (1999, p.36).

Sem contexto, provavelmente pensaremos sobre geometria euclidiana e suas associações com retas paralelas. Mas quando consideramos as mesmas linhas paralelas em um gráfico cartesiano, poderia ser sugerido um conceito de representação de funções cartesianas lineares e então, estas linhas não seriam apenas objetos geométricos, elas tornar-se-iam representações de funções lineares, que sugeririam noções de que cada linha corresponde a uma equação na forma  $y = ax + b$ , onde tais linhas possuem o mesmo coeficiente angular e nenhuma solução para cada par de equação e, talvez, a atenção fosse redirecionada para a noção de distância entre as linhas paralelas e deslocamento vertical entre elas, que nos mostra a diferença dos valores do coeficiente linear. Ou poderia-se dizer que são apenas duas linhas extras no gráfico.

Com isso, podemos dizer que quando “vemos o que sabemos”, estamos evidenciando o fato de que vemos exatamente aquilo que somos ‘treinados’ para enxergar, ou seja, somos constantemente direcionados pelos nossos olhos para enxergar aquilo que o cérebro já conhece e já assimilou. Mas quando nos é apresentado contextos diferentes, passamos a enxergar significados diferentes para aquele objeto de estudo.

### 3. Entendendo a visualização

Atualmente existem mudanças no que se entende como ‘a natureza da matemática’: antes a matemática era vista como uma constante ‘busca por padrões’ e, hoje, é natural tentar encontrar meios mais eficientes para visualizar tais padrões e aprender a usar visualização como ferramenta para compreensão.

Estamos mudando de uma visão onde a matemática consiste em uma estrutura lógica que temos que seguir (ou descobrir) para uma visão em que a matemática é (também) um processo de conjecturas e justificações ou refutações. (HERSHKOWITZ, PARZYSZ e DORMOLEN, 1996, p.166, tradução nossa)

Nesse contexto, formas não são descritas como entidades estáticas, mas como entidades dinâmicas, com habilidades de mudanças como uma de suas características principais, numa mudança de ponto de vista necessária, onde um ambiente experimental deveria ser mais importante.

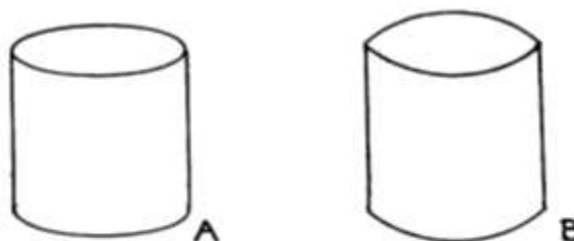
#### 3.1 – Visualizando a geometria

A geometria, quase sempre, aparece como um modelo do espaço físico e está diretamente relacionada com a experiência sensorial. Parzysz (1991) realça a dificuldade dos estudantes em entender e interpretar figuras geométricas, em “transferir as propriedades geométricas do objeto representado para sua representação gráfica” (p.575, tradução nossa). O processo que leva da realidade física para o modelo teórico, ou da relação geométrica para a imagem gráfica, implica no propósito do desenho geométrico, que possui funções como a de ilustrar definições ou teoremas, agrupar informações dadas num determinado problema, conjecturar possíveis relações entre elementos, prover contraexemplos, entre outras. Obviamente essas funções são facilmente aplicáveis na geometria plana. Já na geometria espacial, o estudante pode ser levado a conclusões errôneas dadas por desenhos planos de objetos 3D.

Nos desenhos geométricos, é usual (e prático) manter a maior quantidade possível de propriedades do objeto 3D quantas forem possíveis nos desenhos

2D. Os desenhos na geometria espacial são feitos em perspectiva, ou seja, são projeções de um dado objeto em um determinado plano, numa determinada direção.

O caso dos cilindros, por exemplo: desde meados do século 19, sua base circular tem sido representada pelos livros de duas formas: elíptica e lenticular (Fig. 1, A e B). Porém, sabe-se desde a antiguidade que, em qualquer projeção, um círculo é representado por uma elipse [...]. (PARZYSZ, 1991, p.577, tradução nossa)



*Figura 2: Representação elíptica (A) e Reperesentação Lenticular (B); Reprodução: Parsyys (1991, p 577)*

Mas mesmo que estes desenhos apareçam em perspectiva,

isto não é resultado de um comportamento consciente ou do uso geométrico do processo de representação espacial, é apenas um sistema empírico de rascunhos consistente, cuja função central é a ilustração. (PARZYSZ, 1991, p. 577, tradução nossa)

Tradicionalmente, desenhos geométricos são vistos como “rascunhos melhorados” do resultado do processo de representação espacial.

Para Parzysz (1991, p.579) é importante observar o ponto de vista dos estudantes. Ele relata duas concepções: 1) o desenho de objetos geométricos deve conter certas propriedades a fim de que se constitua uma representação adequada do dado objeto; 2) a influência da representação gráfica na concepção geométrica de alguns estudantes.

Em sua pesquisa, Parzysz (1991) nos mostra que os estudantes (entre 11 e 15 anos), de forma geral, são apegados a certos aspectos centrais das propriedades de um objeto geométrico, ou seja, um sistema de representação

de um objeto deve preservar tais propriedades. Como exemplo ele usa variação de desenhos de um cubo (Figura 3).

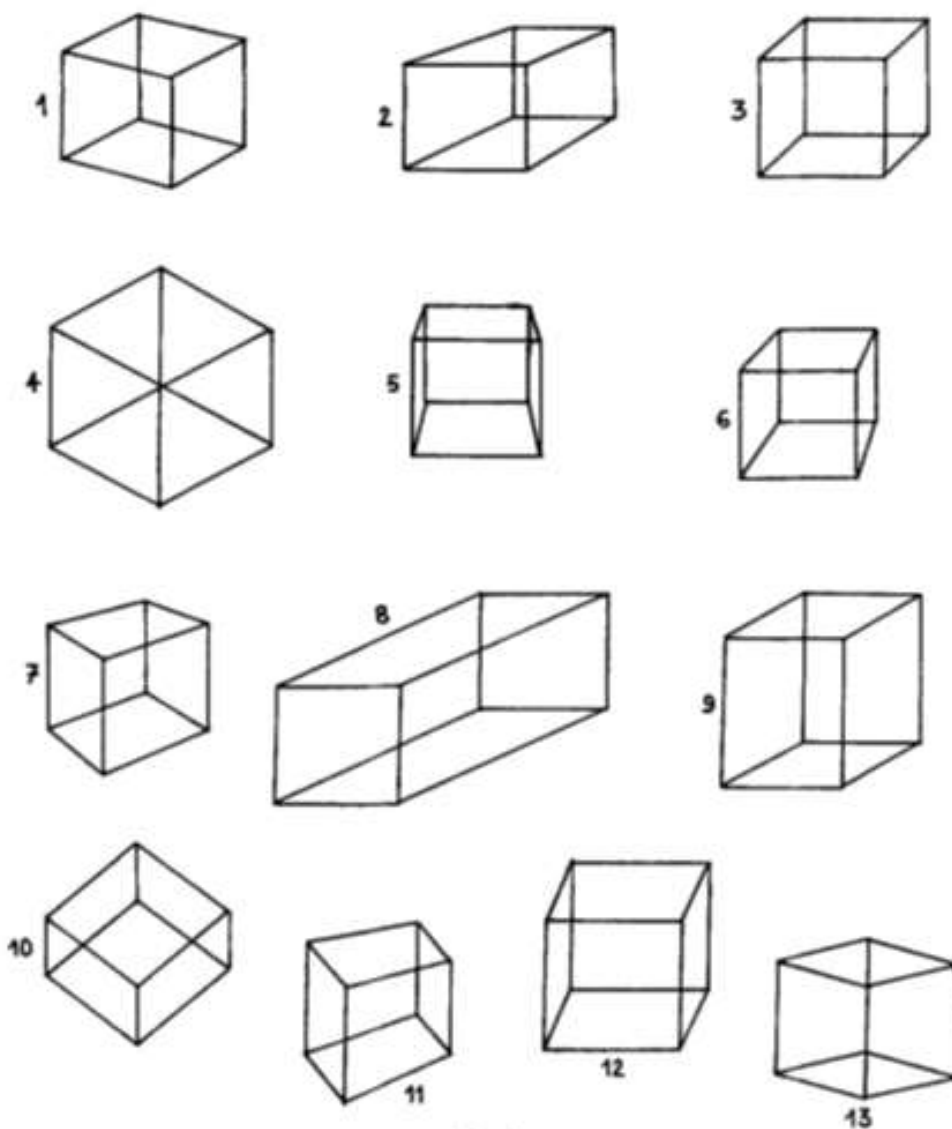


Figura 3: Reprodução: PARZYSZ (1991, p.580)

Dentre as 13 variações, 11 eram de fato projeções do cubo, sendo 7 visões paralelas (2, 3, 4, 6, 8, 10 e 12) e 4 visões centrais (1, 5, 7 e 13). Outras duas eram um paralelepípedo (9) e uma mistura das duas projeções (11). As figuras que não apresentavam características centrais do cubo (como paralelismo e equivalência de lados) não foram consideradas, pelos estudantes, representações do cubo.

## 3.2 – Visualizando as dificuldades

Em seu texto, Jones e Tzekaki (2016) reúnem as pesquisas feitas nos PMEs, entre 2005 e 2015, sobre um mesmo contexto, mostrando os fatores comuns. Em geral, eles nos falam sobre como as pesquisas feitas em ensino-aprendizagem de geometria relatam fatores comuns envolvendo o melhor entendimento de como os estudantes identificam forma e espaço, mas também relatam muitas pesquisas relacionadas à abordagem dada ao ensino e a compreensão do próprio professor sobre a geometria e como ensiná-la.

Pesquisas de raciocínio geométrico tem analisado diferentes componentes, incluindo perspectivas, rotação e transformação mental. [...] As pesquisas em visualização geométrica e pensamento visual são evidência de que o número de investigações relacionadas a habilidades de visualização dos estudantes e professores, ou as propostas de intervenções de ensino está sendo, de alguma forma, limitada. Em contraste, pesquisas continuam a procurar meios de melhorar o ensino-aprendizagem de geometria. Tais pesquisas em raciocínio e demonstrações geométricas continuam em pleno desenvolvimento, estimuladas pelo crescimento da disponibilidade e sofisticação dos softwares computacionais. (JONES & TZEKAKI, 2016, p.139, tradução nossa)

Quando Jones & Tzekaki (2016, p. 114) falam sobre *visualização geométrica e pensamento visual*, relatam que no primeiro manual do PME, feito em 2006, sobre visualização, encontrou-se preocupações no uso do imaginário na matemática em geral, e no processo espacial e pensamento geométrico. Neste sentido, foram resumidos conceitos em visualização, explicando que “ambos imagem visual e inscrições<sup>3</sup> são veículos de comunicação para a exemplificação da visualização em matemática, na medida em que retratam a estrutura espacial de um objeto matemático” (PRESMEG, 2006, p. 22, apud JONES & TZEKAKI, 2016, p.115, tradução nossa).

---

3 Imagem visual e inscrições são termos técnicos utilizados pela autora. A primeira designa representações internas (puramente mentais) de uma estrutura de visual. Já a segunda denomina representações externas (escritas ou na tela do computador) da mesma estrutura. Para maiores detalhes veja Presmeg (2006).

Quando se fala em *demonstrações envolvendo representações bidimensionais de formas tridimensionais*, os diagramas nem sempre ajudam. Por exemplo, em 2012, reportou-se que em início das séries equivalente ao nosso fundamental 2, alguns dos estudantes poderiam “usar o cubo como um objeto geométrico abstrato e raciocinar sobre ele, para além da referência da representação” enquanto outros precisavam que fosse oferecida “uma representação alternativa que os ajudassem a ‘ver’ a demonstração” (JONES, FUJITA & KUMIMUNE, 2012, p.339 apud JONES & TZEKAKI, 2016, p.124, tradução nossa). Em 2012, foram comparados seis livros da *sétima série* de Israel. Em comparação com a álgebra, todos os seis livros incluíam “porcentagens consideravelmente grande de tarefas geométricas que pediam que o estudante justificasse ou explicasse suas soluções” (DOLEV & EVEN 2012, p. 203 apud JONES & TZEKAKI, 2016, p. 126, tradução nossa).

Em *identificação de formas 2D e 3D*, muitos estudos investigaram a identificação de formas como triângulos, em diferentes séries, e confirmaram que o conceito é desenvolvido através da experiência tanto dentro como fora da escola. Em 2008, estudantes de sete séries consecutivas foram observados na tarefa de identificação de triângulos. Foi identificado uma melhora ao longo das quatro series iniciais, entretanto, foi observado que havia uma maior facilidade de identificar o que não era triângulo. Uma pesquisa feita em 2009 mostrou que os estudantes possuem muitas dificuldades em representar, identificar ou interpretar figuras geométricas.

Em estudos sobre *cognição visual de objetos geométricos*, eles citam autores que apontam diferenças entre o que se entende por *percepção visual* e *visualização*. Enquanto a percepção visual proporciona direto acesso a formas, mas não dá sua compreensão completa, a visualização é baseada na produção de qualquer representação simbólica do conceito e entrega por completo a compreensão de qualquer organização de conceitos (JONES & TZEKAKI, 2016, p. 115, tradução nossa). Também é relatado o fato de que a dificuldade dos estudantes pode estar associada ao nível da capacidade de visualização dos professores. Por exemplo, em 2006, uma pesquisa feita em 25 professores sobre suas noções visuais em conteúdos já adquiridos na área da cognição. Foi



mostrado que a *cognição visual*<sup>4</sup> destes professores era bastante limitada e que suas capacidades de estimativas visuais eram similares aos estudantes de terceira série. Em 2008, em outra pesquisa feita sobre imagens mentais de retas e planos observou-se contradições entre o conhecimento formal dos professores e sua imagem mental. Em 2014, uma pesquisa feita sobre percepção visual de coordenadas cartesianas, focava nas transformações necessárias das percepções para se obter modelos visuais. Os autores compararam os movimentos dos olhos em três níveis de competência matemática e foi confirmado que “quanto maior o nível de estudo, menores são os seus padrões do olhar, menor números de fixações e menor é a duração da resolução da tarefa” (Chumachemko, Shvarts & Budanov, 2014, p. 316 apud JONES & TZEKAKI, 2016, p116, tradução nossa).

Quando se fala de *Desenvolvimento das capacidades dos estudantes com raciocínio e demonstrações geométricas*, as investigações são focadas nas estimativas cognitivas de competência de demonstrações geométricas. Uma pesquisa, publicada em 2007, relatou a capacidade dos estudantes em ler demonstrações geométricas, levando outra pesquisa com o mesmo foco, em 2008, a concluir que “se o estudante não entende a natureza da demonstração matemática ou não tem estratégias de resolução de problemas, ele ou ela dificilmente conseguirá construir uma demonstração, ainda que possua o melhor do conhecimento geométrico” (UFER, HEINZE & REISS, 2008, p. 367 apud JONES & TZEKAKI, 2016, p.124, tradução nossa). Em 2011, pesquisadores relataram que surgem suposições injustificáveis quando os estudantes “usam incorretamente teoremas ou designam propriedades que não pertencem ao objeto geométrico” e que suposições injustificáveis são “feitas com o propósito de chegar num ponto crítico da demonstração” (DVORA & DREYFUS, 2011, p. 289 apud JONES & TZEKAKI, 2016, p.124, tradução nossa).

Numa tentativa de entender como materiais baseados em visualização geométrica ajudam os estudantes a formar conjecturas, Lin e Wu (2007), examinaram estudantes da sexta série que ainda se encontravam num processo de geometria intuitiva. A análise apresentou que “estudantes geram relações de

---

4 Um número de pesquisas tem seus estudos focados em ‘cognição visual’ (visual cognition) definindo-a como um processo mental (percepção, reconhecimento, retenção na memória, etc.) que se refere ao jeito como um indivíduo adquire e processa informação visual. (JONES & TZEKAKI, 2016, p.115, tradução nossa)

conjecturas se olham para um exemplo ao invés de dois ou três ao mesmo tempo” (JONES & TZEKAKI, 2016, p. 126, tradução nossa). Em 2010, Fujita, Jones e Kunimune, estudaram a possibilidade de haver uma “unidade cognitiva” entre as construções geométricas e as demonstrações dos estudantes. Concluiu-se que seria necessária uma pesquisa mais aprofundada para abordar o como e qual a extensão dessa unidade cognitiva. Em 2014, os mesmos autores apresentaram casos onde o uso da construção geométrica possibilita estudantes a fazer a transição de “apoiar-se na aparência visual ou nas medidas para raciocinar com propriedades de formas” (FUJITA, KUNIMUNE e JONES, 2014, p.65 apud JONES & TZEKAKI, 2016, p. 125, tradução nossa).

Muitos estudos examinaram os caminhos no qual estudantes compõem ou constroem uma demonstração, ou criam uma definição, e como isto pode ajudar a entender a abordagem das demonstrações feitas pelos estudantes em geral, porque as características destas abordagens são muito próximas do processo de demonstrações e definições matemáticas. [...] Estas pesquisas concluíram que professores precisam dar explícita atenção ao valor das demonstrações informais e que para estudantes desenvolverem seu senso de raciocínio geométrico é necessária uma experiência extensiva de conjecturas e verificação destas (JONES & TZEKAKI, 2016, p. 127, tradução nossa)

Uma pesquisa feita com estudantes universitários treinados em software 2D (Euklid DynaGeo e Cabri 3D) em 2008, mostrou que experiências em ambientes bidimensionais pareciam insuficientes quando foram levados a trabalhar com espaço 3D. Eles apresentavam problemas em justificar fatos simples em espaço tridimensional e que utilizavam o acesso aos modelos 3D para facilitar a resolução das tarefas pedidas.

Muitos estudos investigaram o conhecimento dos estudantes de figuras 3D e verificaram um melhor desempenho deles quando comparado com pesquisas de 20 anos atrás. Notou-se que, majoritariamente, os estudos que abordam o ensino-aprendizagem da geometria fazem uso dos modelos de Van Hiele. Observou-se também que o entendimento de espaço está diretamente relacionado à idade, mas existem indivíduos que ainda possuem conceitos

vagos sobre dimensão e espaço independe de sua idade. “Isto se atribui a falta de educação apropriada e é geralmente melhorada por propostas de professores” (JONES & TZEKAKI, 2016, p. 140, tradução nossa).

Considerando que, de uma maneira geral, se recebe uma educação dita tradicional, existe muita resistência a mudanças. Por isso, falar sobre novos meios de ensino-aprendizagem de geometria não é algo que se aplica a todos. “Assumimos que meios alternativos de ensino de geometria fortalecerão o pensamento visual e apoiamos-nos nos poderes dos gráficos dinâmicos das ferramentas tecnológicas” (HERSHKOWITZ, PARZYSZ e DORMOLEN, 1996, p.166, tradução nossa)

### 3.3 – Educação Visual

Existe uma suposição ingênua de que, de alguma forma os estudantes já possuem a habilidade do pensamento visual e que eles a aplicam quando precisam. A habilidade dos estudantes de visualizar objetos reais vem sendo considerada uma atividade matemática, ainda que a educação visual seja regularmente negligenciada no currículo escolar. Hershkowitz, Parzysz e Van Dormolen (1996, p. 161, tradução nossa) afirmam que “se temos dificuldades em definir o que é forma, definitivamente teremos dificuldade em descrever o que significa”. Eles descrevem três etapas do pensamento visual:

1. Interação com formas no espaço;
2. Espaço e forma como fundamentais para construção de teorias;
3. Representações espaciais como meio para compreensão de conceitos.

Tais perspectivas nos ajudam a compreender o processo de formação visual mental.

### 3.3.1 – Interagindo

Na primeira perspectiva temos a compreensão do mundo visual que nos rodeia, suas descrições e decodificações, incluindo interpretação da informação visual e interação para a compreensão nas mudanças das formas.

Interagir com formas reais do nosso espaço possui três grandes objetivos:

- i. Descobrir semelhanças (e/ou diferenças) entre objetos;
- ii. Analisar as formas do objeto;
- iii. Reconhecer formas em diferentes representações.

Aqui estamos interessados em objetos reais, palpáveis e do nosso mundo. Para enfatizar os aspectos dinâmicos, observe a posição relativa das formas entre si; a posição relativa entre o observador e o objeto, e o processo de mudanças nas formas.

### 3.3.2 – Fundamentando Teorias

Espaço e forma são fundamentais para construção da teoria. A geometria tradicional teve início com o que se pode ser visto com os olhos, e espaço e forma geram o ambiente onde o aluno pode sentir as teorias matemáticas para que possa, num estágio mais avançado, adquirir a abstração e não ter a necessidade do objeto real. Aqui se elabora a dualidade das formas. As figuras podem ser vistas como sendo parte do um mundo real, como também podem ser parte de um modelo para uma teoria. Mesmo nos casos mais abstratos, lidamos com algum tipo de forma para a representação mental, ainda que não possam ser visualizadas no mundo real, o que nos remete a representação teórica.

### 3.3.3 – Abstraindo

Representações visuais são meios para um melhor entendimento de conceitos, processos e fenômenos nas diferentes áreas e contextos. Formas são

consideradas representações visuais da matemática ou de outras entidades científicas. Aqui desenvolve-se a habilidade de interpretar, compreender, e criar representações e analogias entre a representação visual e outros tipos de representações. As várias perspectivas de forma e espaço e a transição entre concreto e abstrato é o que faz o pensamento visual muito fascinante e bastante complexo. Ele é intuitivo, global e analítico ao mesmo tempo. Existem muitos níveis de abstração nessa perspectiva: a habilidade de processar diferentes tipos de classificações, analisar os diferentes objetos, e interpretar e descrever as informações do objeto.

## 4. A visualização

Quando se menciona ensino e/ou aprendizagem de Geometria 3D, visualização espacial é automaticamente o que todo mundo pensa. A habilidade espacial, especialmente a visualização, é base neste campo, “como tem sido provado que os níveis de desenvolvimento dos estudantes em tais habilidades influenciam suas conquistas quando cursando uma disciplina de geometria 3D.” (GUTIÉRREZ, 1992, p.33, tradução nossa).

Segundo Gutiérrez (1997, p.4, tradução nossa), a geometria pode ter sido considerada a origem da visualização na matemática, mas quando se procura pelo termo visualização, “pode-se encontrar títulos que tratam de engenharia, arte, medicina, economia, química, direção, e algumas outras especialidades surpreendentes.” (p.4, tradução nossa). Ele relata ainda que existem inúmeras publicações sobre o desenvolvimento de um indivíduo (criança ou adulto) e as relações entre visualização e desenho, escrita, fala, construção e manuseio de objetos 3D, e um monte de outros assuntos relacionados com psicologia, matemática ou educação matemática (p.4).

Nas pesquisas sobre visualização em educação matemática,

encontramos muitas pesquisas focadas em ensino ou aprendizagem de cálculo (pensamento avançado em matemática), muitas em (pre-)álgebra e sistemas numéricos, algumas em geometria plana, e apenas poucas focadas em geometria espacial. (GUTIÉRREZ, 1997, p.4, tradução nossa)

Um outro ponto apontado por Gutiérrez (1997, p.3) é a existência de uma enorme quantidade de termos usados para descrever a mesma coisa: raciocínio visual, imaginação, imaginário visual, pensamento visual, pensamento espacial, imagem mental, imagem visual, imagem espacial, entre muitos outros.

Com a revolução tecnológica que ocorreu nas últimas décadas, e a popularização dos computadores e outras ferramentas multimídias, professores e pesquisadores possuem novos elementos que podem reformular o método de ensino de geometria espacial. Uma destas novas ferramentas são os programas de computadores que usam representação 3D de objetos geométricos e

permitem que usuários transformem estes objetos dinamicamente (rotação, translação, aumento ou diminuição, secções por planos...).

Mas apesar do aspecto tridimensional do objeto representado na tela do computador, eles, assim como as figuras, são representações planas de objetos espaciais, e algumas das mais bem conhecidas dificuldades dos estudantes quando interpretam representações tradicionais planas de sólidos também aparecem em ambientes tecnológicos. (GUTIÉRREZ, 1997, p.5, tradução nossa).

#### 4.1 – A Psicologia da visualização

Quase sempre, pesquisadores estão interessados em como as imagens mentais são criadas, formadas e armazenadas na mente de uma pessoa. Por esta razão, muitos testes designados para estimar as habilidades dos estudantes na manipulação de imagens mentais não permitem o uso de papel e lápis ou computadores.

Em psicologia cognitiva, um significado de “imagem mental”, apoiada por Dennis, Kosslyn e outros, é que uma *quasi*-figura é formada na mente a partir de uma memória, sem nenhum suporte físico. Kosslyn (1980) explica em sua teoria que imagens mentais possuem dois componentes principais: a *representação superficial*: a entidade *quasi*-figura presente na memória ativa; e a *representação profunda*: a informação armazenada na memória de longo prazo, de onde a representação superficial se deriva. Pylyshyn argumenta contra este conceito de imagem mental, argumentando contra as muitas deficiências que ele vê na metáfora “figura na mente” e na necessidade que sentem de uma definição menos vaga. [...] Uma terceira posição é mantida por aqueles que argumentam que a mesma representação é usada em todos os tipos de processos cognitivos, e imagens mentais são apenas um caso particular, assim não há nada especial em imagens mentais que as façam merecer uma teoria particular. (GUTIÉRREZ, 1997, p.5, tradução nossa)

Psicólogos educacionais, professores de matemática, educadores matemáticos e matemáticos não compartilham de tais significados. Para eles, o significado tende a ser bem simples:

“imagens mentais” são uma representação de um conceito ou propriedade matemática contendo informação baseada em figuras, gráficos ou diagramas; “visualização” (ou pensamento visual) é um tipo de raciocínio baseado no uso de imagens mentais. (GUTIÉRREZ, 1997, p.6, tradução nossa)

Contradizendo o conceito psicológico, educadores matemáticos afirmam que imagens mentais e representações externas devem interagir para que se consiga uma melhor compreensão do objeto de estudo, uma vez que, na matemática, o uso de figuras e diagramas é uma constante. E ainda que os conceitos e propriedades da matemática possuam, em grande parte, uma representação abstrata baseada em informações simbólicas, a visualização se torna o contexto da interação entre imagens mentais e suas representações.

Durante o ensino-aprendizagem de geometria 3d, faz-se necessário a distinção entre aquisição e uso do que se assume ser geometria 3d (como conhecimento e classificação de sólidos); e aquisição e desenvolvimento de habilidades espaciais<sup>5</sup> (que se apresentam no desenvolver de uma atividade).

No modelo de van Hiele se faz necessário dividir o problema considerando o entendimento de conhecimentos geométricos e a aquisição das habilidades espaciais.

Embora seja bem simples trabalhar em visualização espacial evitando o uso de qualquer aspecto da geometria 3d, é, provavelmente, impossível trabalhar na geometria 3d sem considerar alguns aspectos da visualização, de forma que os resultados destas duas investigações possam ser diferentes. Consequentemente, uma análise completa do processo de aprendizagem em geometria 3d deve ser subordinado à uma análise da aquisição das habilidades de visualização espacial. (GUTIÉRREZ, 1992, p.34, tradução nossa).

---

5 Por habilidades espaciais entende-se representação, transformação, criação e uso de informação não linguística.



## 4.2 – Dialogando com os Van Hiele

O modelo de Van Hiele se divide em duas etapas (que veremos adiante): os níveis de pensamentos (uma descrição de níveis de complexidade de como os estudantes pensam geometria) e as fases de aprendizagem pelas quais devem passar para atingir esses níveis.

Os níveis de Van Hiele possuem uma ordem sequencial, hierárquica e fixa, ou seja, não é possível obter um conhecimento mais avançado de geometria sem passar pelo nível anterior (ou, o estudante não consegue atingir o nível  $n+1$  sem passar pelo nível  $n$ ). Mais ainda, cada nível tem sua própria linguagem e o que é essencial num nível torna-se usual no próximo nível.

Entendimento e reflexão individual de ideias geométricas são mais essenciais e necessárias para passar de um nível para o próximo do que maturidade biológica. (UKEssays)

Uma grande preocupação para Van Hiele era a passagem de níveis, ainda que o progresso não possa ser ensinado (deva ser obtido através do conhecimento), ele é, em grande parte, dependente do tipo de ensino.

Embora não seja usualmente o caso e estudantes tem uma falta de conhecimento prévio no entendimento de geometria, Van Hiele argumenta que esta falta cria um “vácuo” entre o nível de pensamento geométrico que os estudantes estão e o nível ao qual eles são requeridos estar para determinado aprendizado. Ele apoia o ponto de vista de Piaget: “nenhuma educação é melhor do que uma educação dada no tempo errado”. (Van Hiele, 1999 apud ukessays.com)

Segundo Gutiérrez (1992, p.35), estudantes normalmente trabalham em três contextos: manipulação de objetos reais; representações planas num papel; e manipulação de representações 3d em um computador. Cada contexto, sendo importante para o processo de aprendizagem e para a vida do dia-a-dia, tem suas vantagens e desvantagens.

Os objetos físicos são os mais versáteis e fáceis de manipular. Ainda assim, esta facilidade esconde muitas das manipulações envolvida no

trabalho com sólidos e os estudantes perdem a noção dos links entre o movimento físico e movimentos mental requerido em outros contextos; as representações planas são as mais frequentes no nosso mundo. Elas são as que dão a mais completa informação sobre as características do sólido representado. Mas também são as mais difíceis de manipular mentalmente. Conhecimento prévio se faz necessário. Computadores são uma assistência válida para professores, entretanto pesquisas feitas sobre suas vantagens com respeito a outros contextos clássicos mostram resultados contraditórios; de acordo com suas vantagens e desvantagens. Os computadores podem ser localizado entre sólidos reais e representação plana, mais próximo de um ou de outro dependendo do software utilizado. (GUTIÉRREZ, 1992, p.35, tradução nossa)

Dessa forma, criamos um micromundo que correlaciona estes três contextos e, segundo Gutiérrez (1992, p.35) a atividade dos estudantes sempre estará presente em dois contextos simultaneamente.

É importante destacar que pesquisas mais recentes sobre trabalho com geometria tridimensional, usando softwares de geometria dinâmica 3D, mostram importantes potencialidades educativas no uso desse tipo de aplicativo. Pode-se dizer que eles são importante ferramenta para o trabalho com os tópicos do currículo ligados à geometria no espaço. (Miyazaki et al., 2012)

#### 4.2.1 – Os Níveis de Pensamentos

O modelo de Van Hiele categoriza o estudante de acordo com a seu entendimento e sofisticação de pensamento geométrico. O modelo consiste em cinco níveis (0, 1, 2, 3, 4), aqui enumerados de 1 a 5, para que possamos indicar nível 0 aquele que não se encaixa em nenhum nível. (ukessay.com)

1. Visualização: A primeira fase é o estágio da informação e do reconhecimento. O estudante aprende sobre a natureza do objeto geométrico, a comparação entre sólidos se dá pela percepção das formas, faces, vértices, etc.
2. Análise: Nesta fase, estudantes são capazes de visualizar mentalmente movimentos simples entre duas posições concretas do sólido. A

percepção dos sólidos leva a examinação de diferentes propriedades matemáticas, aparente das observações ou do nome do sólido.

3. Dedução informal: Aqui os estudantes são capazes de fazer análise matemática do sólido e de suas características antes de qualquer movimentação, incluindo justificativas informais. Eles tentam achar o menor número de propriedades necessárias para descrever um objeto. Neste estágio, os estudantes também são capazes de categorizar propriedades e apresentar argumentos com relações lógicas.
4. Dedução: Neste nível o foco está em organizar o que já foi aprendido e ao invés de decorar, estudantes são capazes de construir demonstrações e são capazes de encontrar diferenças entre as demonstrações. Eles começam a entender diferenças entre contra positiva, contradição e absurdo.
5. Rigor: Este nível busca identificar a organização do nível anterior, encontrando relações entre as demonstrações. A maioria dos conceitos vistos aqui são demonstrações abstratas e os estudantes são capazes de comparar geometria euclidiana e não-euclidiana. A maioria dos estudantes neste nível tornam-se profissionais da área geométrica.

#### 4.2.2 – As Fases de Aprendizagem

Estas fases são uma sugestão para professores em como organizar o ensino de geometria, de forma a facilitar e promover a passagem do estudante de um nível de pensamento para o seguinte.

1. Reconhecimento (ou estágio informativo): O professor tem o papel de identificar o conhecimento prévio do aluno e preparar atividades que vão de encontro com o novo conceito a ser aprendido.
2. Orientação direcionada: O professor prepara atividades apropriadas ao nível de pensamento geométrico do estudante para familiarizá-lo com o conceito que está sendo abordado.
3. Explicação: O papel do professor nesta fase é o uso da linguagem matemática apropriada. Ele deve fornecer um contexto de terminologias matemáticas de forma adequada e relevante ao aluno.

4. Orientação Livre: Nesta fase é o estudante quem decide como realizar a tarefa dada. O professor orienta apenas quando se faz necessário.
5. Integração: nesta fase, o estudante rever suas tarefas e observa o que aprendeu ao desenvolver sua própria rede de conhecimento geométrico. Com esta fase completa, o estudante pode passar para um novo nível de pensamento geométrico.

Observe que as fases de aprendizagem não estão diretamente relacionadas com os níveis de pensamento geométrico. Para cada nível o estudante deve passar por todas as cinco fases, eventualmente, mais de uma vez em algumas fases (ou ciclo de fases). O papel do professor é apenas prover atividades apropriadas baseadas em cada fase para cada um dos níveis de pensamento geométrico.

### 4.3 – A Teoria de visualização de Gutiérrez

Tem ocorrido inúmeras abordagens isoladas na geometria 3D baseada no modelo de Van Hiele. A primeira tentativa de caracterizar explicitamente os níveis de van Hiele em geometria 3D aparecem em [17]<sup>6</sup>, onde muitas habilidades geométricas são descritas e pequenas descrições gerais teóricas para cada habilidade e os níveis de Van Hiele de 1 a 5 foram estabelecidos. (alguns exemplos para as habilidades visuais e de desenhos se referindo a sólidos foram consideradas, mas ainda assim não é possível derivar deste artigo uma concepção de modos de pensamento geométrico 3-D baseado nos níveis de van Hiele). (GUTIÉRREZ, 1992, p.33, tradução nossa)

#### 4.3.1 – Definindo conceitos

A visualização é construída através de um processo que envolve uma ação (física ou mental) e sua representação (imagens mentais). Isto gera dois processos: a criação das imagens mentais, através da *interpretação da informação visual*; e obtenção de informação, através da *interpretação de imagens mentais*.

---

6 Hoffer, Allan, 1981. "Geometry is more than a proof". The mathematics Teacher, vol. 74.1, p. 11-18.

Nesse contexto, Gutiérrez (1997) cita algumas definições de outros autores:

Clements, seguindo a teoria psicológica dominante do momento, define *imaginário mental* como uma ocorrência de atividade mental correspondente a percepção de um objeto quando este objeto não está presente. *Imaginário visual* como imaginário mental que ocorre como uma figura nos olhos da mente. E *Habilidade espacial* como a habilidade de formular imagens mentais e manipular tais imagens na mente. (CLEMENTS, 1981, p. 267-68 apud GUTIÉRREZ, 1997, p.7, tradução nossa)

Bishop reconhece duas habilidades na visualização: “processo visual”, que inclui a tradução de relações e informações abstratas em termos visuais, manipulação e extrapolação do imaginário visual e a transformação de uma imagem visual em outra; “interpretação de informação figurativa”, que envolve conhecimento de convenções visuais e vocabulário espacial usado nos trabalhos, gráficos, diagramas... geométricos e leitura e interpretação de imagens visuais, mentais ou físicas. (BISHOP, 1983, p. 177 apud GUTIÉRREZ, 1997, p.7, tradução nossa)

Para Yakimanskaya, uma *imagem espacial* é criada a partir do cognitivo sensorial das relações espaciais, e pode ser expresso em uma variedade de formas verbais ou gráficas, incluindo diagramas, figuras, desenhos... [...] Ela descreve *pensamento visual* como uma forma de atividade mental que torna possível a criação de imagens espaciais e manipula-as para resolução de vários problemas teóricos e práticos. considera que *imagens são a unidade operativa básica do pensamento espacial* e os objetos geométricos são o material básico usado para criar e manipular imagens espaciais. (YAKIMANSKAVA, 1991 apud GUTIÉRREZ, 1997, p.6, tradução nossa)

Yakimanskava descreve dois níveis de atividades no pensamento espacial, a criação da imagem mental e sua manipulação ou uso com dois processos interrelacionados. (YAKIMANSKAVA, 1991, p.101 apud GUTIÉRREZ, 1997, p.8, tradução nossa)

Assim, Gutiérrez descreve um modelo de caracterização para o campo de visualização em matemática, definindo seus elementos principais numa tentativa de integrar e complementar inúmeros elementos previamente definidos por Presmeg, Bishop, Clements e outros, que parcialmente explicaram atividades de alunos e professores quando eles usam visualização como um componente de ensino, aprendizagem ou raciocínio em matemática.

#### 4.3.2 – A teorizando a visualização

Indivíduos precisam adquirir e aprimorar uma parte de suas habilidades de visualização para apresentar o processo necessário com imagens mentais específicas para uma determinada situação. Tais habilidades podem ter diferentes fundamentações, as principais sendo: (GUTIÉRREZ, 1997, p.10, tradução nossa)

1. Percepção figurativa: habilidade de identificar uma figura específica quando isolada de um contexto.
2. Percepção constante: habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto são independentes de tamanho, cor, textura, posição e mantêm-se constantes quando dado objeto ou figura é percebido em outra orientação.
3. Rotação mental: habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas e visualizá-las em movimento.
4. Percepção de posições espaciais: habilidade de relacionar um objeto, figura ou imagem mental.
5. Percepção de relações espaciais: habilidade de relacionar inúmeros objetos, figuras e/ou imagens mentais simultaneamente.
6. Discriminação visual: habilidade de comparar inúmeros objetos, figuras e/ou imagens mentais para identificar similaridades e diferenças entre eles.

A figura (4) abaixo faz um resumo dos passos a serem seguidos quando se usa visualização para resolver uma tarefa:

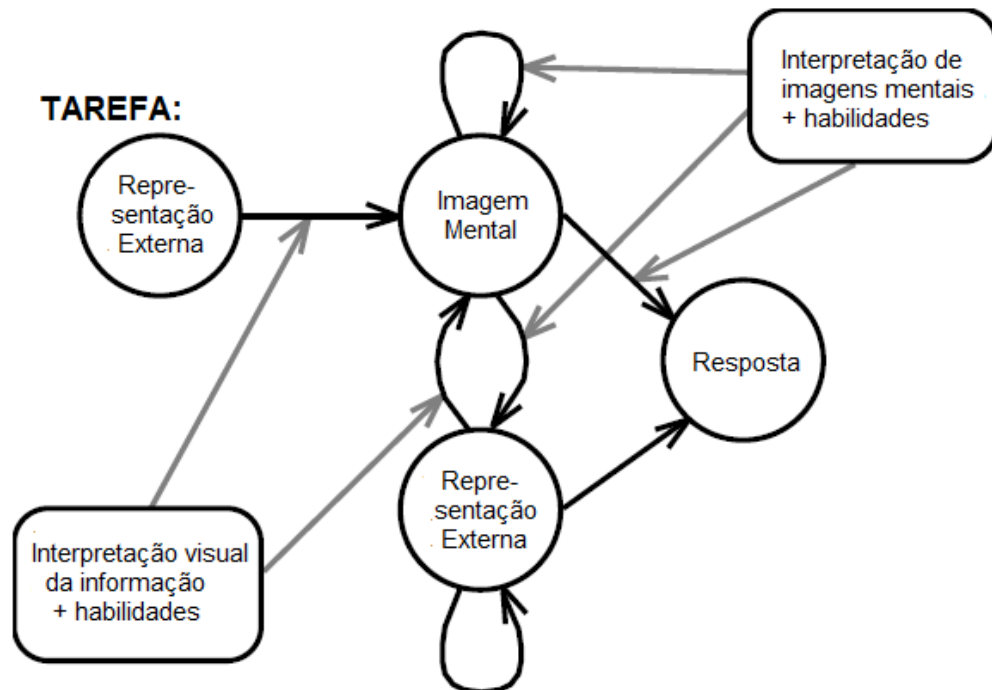


Figura 4: Visualização geral da interação dos elementos na solução de uma tarefa matemática. Reprodução: Gutiérrez (1991, p 11, tradução nossa)

Observe que, independente do modelo escolhido (Piaget, Van Hiele ou Gutiérrez) para representar como é, em teoria, construído o pensamento matemático, todos levam a mesma conclusão: a abstração completa de todo e qualquer conhecimento.

## Minha Visualização

Depois de tudo isso eu concluo que nada foi concluído. Ainda há muito o que observar, analisar e pesquisar no campo da visualização, que, de fato, é muito amplo. Muitas perguntas ainda existem, e muitas delas são contraditórias, no sentido de que vivemos num mundo 3d que se faz praticamente impossível no imaginário de alguns.

Observe que falar sobre a visualização é falar sobre qualquer coisa que você possa querer. Não existe, no mundo, uma única história contada em que o ouvinte não visualize mentalmente (ou imagine) os personagens da história e o contexto descrito nela. Sempre que se relata qualquer acontecimento, é inconsciente o fato de que o ouvinte vai imaginar o fato relatado. Ou seja, a visualização é um processo de natureza fundamental existente dentro da nossa própria (in)consciência. Então por que a visualização não recebe o devido valor? Por que não usar este tipo de interação para inicializar um processo de educação visual na criança? Por que é tão difícil visualizar algo em geometria 3d (espacial) se vivenciamos cotidianamente o mesmo espaço 3d? Como pode um cérebro que passa a vida inteira no mundo tridimensional não conseguir manipular uma simples figura geométrica deste mesmo mundo tridimensional?

Percebo que a educação visual se faz necessária por muitos aspectos. A visualização é parte de todos os nossos contextos vividos, ela está em tudo e todos. O mais próximo de mim, e este trabalho, é o da visualização matemática, em particular, na geometria espacial. É praticamente impossível trabalhar geometria 3d sem falar de visualização.

O modelo de Van Hiele foi um salto enorme para o ensino de geometria, e a partir disso Gutiérrez teoriza sobre geometria espacial e talvez tenhamos alguns passos dados a caminho da descrição de um processo que facilite a interação e compreensão do ensino-aprendizagem de geometria. Mas como o próprio Gutierrez disse, ainda há muito a se pesquisar...

As dificuldades apresentadas são muitas, eu percebo que passei por algumas delas e percebo também outros alunos passando por outras. O mundo está em constante desenvolvimento e a tecnologia está em tudo, mas ao mesmo tempo ficamos presos ao mundo tecnológico sem dar valor a pequenas coisas do passado que fazem muita diferença.



Por exemplo, ao longo de todo meu ensino fundamental, eu tive aula de desenho geométrico. Era uma matéria que possuía sua própria prova e o professor era formado em desenho. Hoje, ao que me parece, ela saiu do currículo e, na maioria das escolas, os alunos nem sabem que isso existe. Na minha opinião foi um grande passo... para trás. O computador, mesmo com toda sua utilidade não substitui o fazer manual dos alunos, o observar que deu certo ou errado e o porquê. Dá para fazer isso num computador? Sim. É viável? Nem sempre.

Particularmente, acredito que não estamos preparados para o uso de toda essa tecnologia. Não que não devamos tentar, mas do mesmo jeito que os alunos têm dificuldades, os professores também as possuem. E não são todos que sabem, querem ou gostam de usar algum software para o ensino. Aqui também se faz necessário uma educação visual para os professores. Muitos professores trazem suas próprias deficiências em visualização desde que eram alunos, e como ensinar algo que nem você compreende? Assim é melhor não ensinar do que ensinar errado!

Eu acredito que trazer o ensino de desenho geométrico para o ensino talvez seja a melhor opção. Seja devolvê-lo a educação básica, ou acrescentar um contexto onde visualização fosse parte da ementa obrigatória no ensino de geometria (plana e espacial) nos cursos de graduação em matemática, em particular nas licenciaturas.

## Bibliografia

- Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. *XXI Conference on the psychology of mathematics education, North American Chapter*, pp. 26-41. Mexico.
- Cavicchia, D. d. (06 de dezembro de 2010). Psicologia do desenvolvimento. *O desenvolvimento da criança nos primeiros anos de vida*. UNESP. Acesso em 07 de setembro de 2019, disponível em <http://acervodigital.unesp.br/handle/123456789/224>
- Chiappini, G., & Bottino, R. (1999). *Visualization in teaching-Learning mathematics: the role of the computer*. Genova, Itália. Acesso em 2018, disponível em <https://www.researchgate.net/publication/228723495>
- Costa, A. C., Bermejo, A. P., & Moraes, M. S. (2009). Análise do Ensino de Geometria Espacial. *X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Ijuí - RS: Ed. Unijuí.
- Crowley, Mary L. (1994). cap 1: O modelo de Van Hiele do pensamento geométrico. Em A. P. Shulte, & M. M. Lindquist, *Aprendendo e ensinando geometria* (H. H. Domingues, Trad., pp. 1-20). São Paulo: Atual.
- Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional geometry. Em *Structural Topology* (pp. 31-47). Valencia, Espanha: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (1997). *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a framework*. Universidad de Valencia, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Valencia (Spain).
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. V. (1996). Space and Shape. Em A. J. Bishop et al. (Ed.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161-166). Kluwer Academic Publisher.
- Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. Em A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense.
- Melhoramentos (Ed.). (2019). *Michaelis*. Acesso em 17 de Agosto de 2019, disponível em <http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=visualiza%C3%A7%C3%A3o>
- Ministério da Educação. (2006). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN). *Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasil. Acesso em Janeiro de 2020, disponível em <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>
- Ministério da Educação. (2006a). Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). *Ciências da Naturezas, Matemática e suas Tecnologias: Orientações Educacionais Complementares*. Brasil. Acesso em Janeiro de 2020, disponível em <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>
- Miyazaki, M., Kimiho, C., Katoh, R., Arai, H., Ogihara, F., Oguchi, Y., . . . Komatsu, K. (Maio de 2012). Potentials for spatial geometry curriculum development with three-dimensional dynamic geometry software in lower secondary mathematics. *International Journal for Technology in Mathematics Education, Vol 19*(No 2). Acesso em Janeiro de 2019, disponível em ResearchGate: <http://www.researchgate.net/publication/258639762>

- Motoito, R., & Leivas, J. P. (jul/dez de 2012). A Representação do espaço na criança, segundo Piaget: Os processos mentais que conduzem à formação da noção do espaço euclidiano. *VIDYA*, v. 32 (n. 2), 21-35.
- Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' perceptions at high school level. Em *Educational Studies in Mathematics* 22 (pp. 575-593). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Presmeg, N. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. Illinois State University, Mathematics Department.
- UKEssays. (maio de 2017). *The Van Hiele Theory Of Geometric Thinking*. Acesso em dezembro de 2018, disponível em <https://www.ukessays.com/essays/education/the-van-hiele-theory-of-geometric-thinking-education-essay.php>